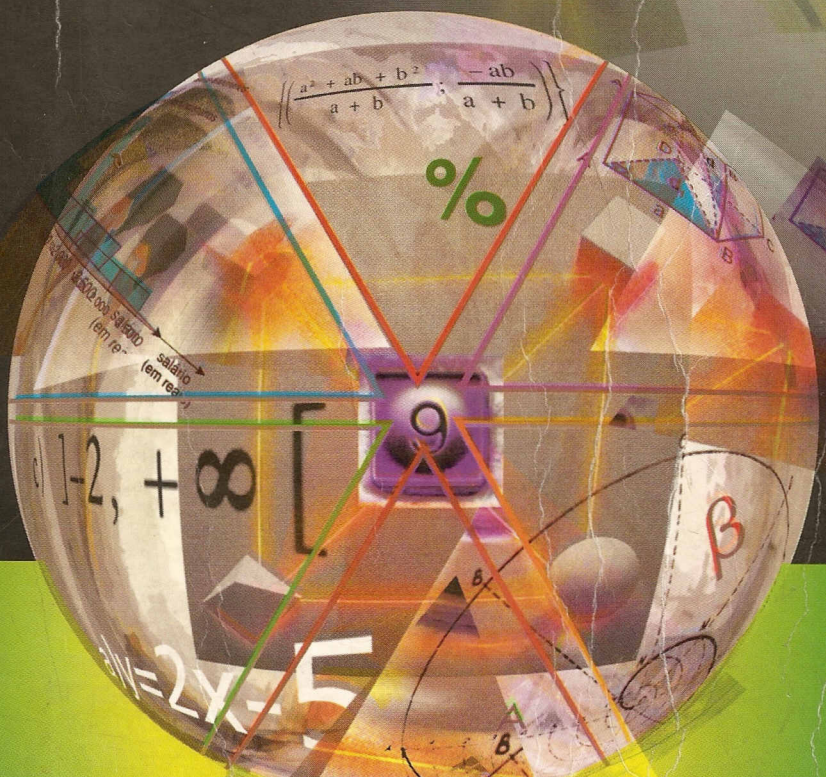
elson Iezzi
Osvaldo Dolce
David Degenszajn
Roberto Périgo



Matemática

volume único

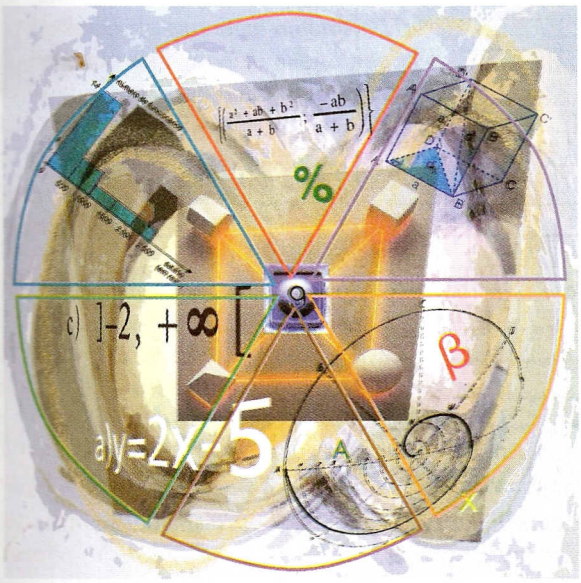
ATUAL
EDITORA

[11340011]

Apresentação

Os programas de Matemática do ensino médio são geralmente muito parecidos, só diferindo em alguns detalhes, como por exemplo a seqüência utilizada no estudo das funções elementares, a série em que a Trigonometria será tratada, a forma de abordar a Geometria, entre outros. Além disso, é grande a variação de carga horária das aulas de Matemática entre as escolas: algumas têm apenas duas aulas semanais, enquanto outras têm oito.

Já fizemos várias tentativas com o objetivo de o livro-texto de Matemática poder contemplar essas variações, mas sempre com sucesso relativo. Um livro por série, por exemplo, pode não atender ao programa de muitas escolas. Dividir o conteúdo a ser ensinado em uma coleção de livros por assunto implica a necessidade de se utilizar dois ou mais livros por série.



Com a obra *Matemática — volume único* pretendemos superar essas dificuldades. Em um só volume, professores e estudantes encontrarão os conteúdos usualmente tratados no ensino médio e poderão ordená-los da forma mais conveniente.

Nesta nova edição introduzimos várias alterações. Por solicitação de muitos colegas professores resolvemos:

- acrescentar dois assuntos: "poliedros", em Geometria, e "cônicas", em Geometria Analítica;
- mantido o capítulo sobre áreas, restringir a Geometria Plana ao estudo da semelhança e das relações métricas nos triângulos, assuntos necessários ao bom desenvolvimento da Trigonometria;
- aprofundar o capítulo de Probabilidades;
- ampliar substancialmente o capítulo de Estatística;
- atualizar os testes e exercícios com questões de vestibulares recentes e do Enem.

Procurando atender ao que preconizam os PCNs quanto à contextualização e à interdisciplinaridade, introduzimos, onde foi possível, problemas de aplicação e estudos que fazem uso de textos, gráficos e tabelas publicados em jornais e revistas de grande circulação no país.

Estamos certos de que esta obra merecerá a análise da classe docente de Matemática no ensino médio e esperamos despertar o interesse dos estudantes. Assim, estamos abertos a críticas e sugestões dos leitores, que poderão enviá-las à editora.

OS AUTORES.

Sumário

Parte 1 — ÁLGEBRA I

1 ○ CONJUNTOS NUMÉRICOS 3

1. Introdução 3
2. O conjunto $\mathbb{N}$ 3
3. O conjunto $\mathbb{Z}$ 4
4. O conjunto $\mathbb{Q}$ 6
5. O conjunto $\mathbb{I}$ 9
6. O conjunto $\mathbb{R}$ 9
7. Intervalos reais 12
8. Outro conjunto importante 14

Testes de vestibulares 14
Desafios 15

2 ○ FUNÇÕES 16

1. Introdução 16
2. Definição 18
3. Funções definidas por fórmulas 19
4. Domínio e contradomínio 21
5. Gráficos 22
6. Noções básicas de plano cartesiano 26
7. Construção de gráficos 27
8. Análise de gráficos 30

Testes de vestibulares 35
Desafios 38

3 ○ FUNÇÃO AFIM 39

1. Introdução 39
2. Definição 39
3. Gráfico 39
4. Coeficientes da função afim 42
5. Zero e equação do 1º grau 43
6. Crescimento e decrescimento 44
7. Sinal 45
8. Inequações 47

Testes de vestibulares 51
Desafios 54

4 ○ FUNÇÃO QUADRÁTICA 55

1. Introdução 55
2. Definição 55
3. Gráfico 56
4. Zeros e equação do 2º grau 57
5. Coordenadas do vértice da parábola 61
6. Imagem 62
7. Construção da parábola 63
8. Sinal 66
9. Inequações 68

Testes de vestibulares 73
Desafios 75

5 ○ FUNÇÃO MODULAR 77
1. Função definida por mais de uma sentença 77
2. Módulo de um número 80
3. Função modular 82
4. Gráfico 82
5. Imagem 82
6. Função composta 82
7. Funções compostas com a modular 84
8. Equações modulares 85
9. Inequações modulares 87
Testes de vestibulares 88
Desafios 91

6 ○ FUNÇÃO EXPONENCIAL 92
1. Potência de expoente natural 92
2. Potência de expoente inteiro negativo 93
3. Raiz n-ésima (enésima) aritmética 94
4. Potência de expoente racional 96
5. Função exponencial 97
Testes de vestibulares 106
Desafios 108

7 ○ LOGARITMOS 110
1. Introdução 110
2. Conseqüências 111
3. Sistemas de logaritmos 112
4. Propriedades operatórias 113
5. Utilização das propriedades 115
6. Mudança de base 117
Testes de vestibulares 118
Desafio 119

8 ○ FUNÇÃO LOGARÍTMICA 120
1. Introdução 120
2. Funções sobrejetoras 121
3. Funções injetoras 121
4. Funções bijetoras ou inversíveis 122
5. Função inversa 122
6. Função logarítmica 125
7. Equações exponenciais 131
8. Equações logarítmicas 132
9. Inequações exponenciais 135
10. Inequações logarítmicas 136
Testes de vestibulares 138
Desafios 141

9 ○ PROGRESSÕES 143
1. Seqüências numéricas 143
2. Progressões Aritméticas 145
3. Termo geral da P.A. 145
4. Notação especial 148

5. Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A. 150
6. Progressões Geométricas 152
7. Termo geral da P.G. 153
8. Trabalhando ao mesmo tempo com P.A. e P.G. 156
9. Soma dos *n* primeiros termos de uma P.G. 157
10. Série geométrica convergente 159
Testes de vestibulares 161
Desafios 164
Respostas dos exercícios e testes 165

Parte 2 — MATEMÁTICA FINANCEIRA

10 ○ NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA 179
1. Razão e proporção 179
2. Porcentagem 180
3. Juros 188
4. Juros simples 188
5. Juros compostos 189
Testes de vestibulares 192
Desafios 195
Respostas dos exercícios e testes 197

Parte 3 — TRIGONOMETRIA

11 ○ SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS 199
1. Introdução 199
2. Triângulos semelhantes 200
3. Relações métricas no triângulo retângulo 204
Testes de vestibulares 208
Desafios 210

12 ○ TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO RETÂNGULO 211
1. Introdução 211
2. Razões trigonométricas 211
3. Relação fundamental I 214
4. Outra razão trigonométrica 216
5. Relação fundamental II 216
6. Ângulos notáveis 217
Testes de vestibulares 220
Desafios 223

13 ○ RESOLUÇÃO DE TRIÂNGULOS 224
1. Introdução 224
2. Ângulos suplementares 224
3. Lei dos senos ou teorema dos senos 225
4. Lei dos cossenos ou teorema dos cossenos 227
Testes de vestibulares 229
Desafios 230

14 ○ FUNÇÕES CIRCULARES 232
1. Ciclo trigonométrico 232
2. Funções circulares 242
Testes de vestibulares 254
Desafios 256

15 ○ RELAÇÕES ENTRE FUNÇÕES 258
1. Relações fundamentais 258
2. Relações decorrentes 261
3. Identidades trigonométricas 262
Testes de vestibulares 264
Desafios 265

16 ○ TRANSFORMAÇÕES 266
1. Introdução 266
2. Fórmulas de adição e subtração 266
3. Fórmulas de multiplicação 269
4. Fórmulas de transformação em produto 272
Testes de vestibulares 274
Desafios 276

17 ○ EQUAÇÕES E INEQUAÇÕES 277
1. Equações elementares 277
2. Inequações elementares 283
Testes de vestibulares 287
Desafios 289

18 ○ RETOMANDO AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS 290
1. Função seno 290
2. Função cosseno 294
3. Função tangente 297
4. As outras funções trigonométricas 299
Testes de vestibulares 300
Desafios 302

Respostas dos exercícios e testes 303

Parte 4 — ÁLGEBRA II

19 ○ MATRIZES 313
1. Introdução 313
2. Representação de uma matriz 314
3. Matrizes especiais 314
4. Igualdade de matrizes 316
5. Adição e subtração 317
6. Multiplicação de um número real por uma matriz ... 320
7. Multiplicação de matrizes 321
8. Matriz identidade 326
9. Matriz inversa 326
Testes de vestibulares 328
Desafios 330

20 ○ DETERMINANTES 331
1. Definição e regras práticas 331
2. Cofator 333
3. Teorema de Laplace 334
Testes de vestibulares 335
Desafios 336

21 ○ SISTEMAS LINEARES 337
1. Introdução 337
2. Equação linear 337
3. Sistema linear 338
4. Sistemas escalonados 340
5. Sistemas equivalentes e escalonamento 342
6. Sistemas homogêneos 347
7. Regra de Cramer 348
8. Discussão de um sistema 350
Testes de vestibulares 353
Desafios 355

22 ○ ANÁLISE COMBINATÓRIA 356
1. Introdução 356
2. Princípio fundamental da contagem 356
3. Fatorial de um número natural 359
4. Arranjos 361
5. Permutações 363
6. Combinações 366
7. Permutação com elementos repetidos 370
Testes de vestibulares 372
Desafios 374

23 ○ PROBABILIDADE 375
1. Introdução 375
2. Experimento aleatório 375
3. Espaço amostral 375
4. Evento 376
5. Probabilidades em espaços amostrais eqüiprováveis ... 377
6. Probabilidade da união de dois eventos 381
7. Probabilidade condicional 383
8. Probabilidade de dois eventos simultâneos (ou sucessivos) 385
9. Experimentos binomiais 388
Testes de vestibulares 390
Desafios 393

24 ○ BINÔMIO DE NEWTON 395
1. Introdução 395
2. Coeficientes binomiais 395
3. Triângulo de Pascal/Tartaglia 397
4. Somatório 399
5. Desenvolvimento de $(a + b)^n$ 400
6. Termo geral do binômio 403
Testes de vestibulares 404
Desafios 405

Respostas dos exercícios e testes 406

Parte 5 — ESTATÍSTICA

25 ESTATÍSTICA 413

1. Introdução 413
2. Variável 413
3. Tabelas de freqüência 415
4. Representação gráfica 417
5. Medidas de centralidade 422
6. Medidas de dispersão 428

Testes de vestibulares 434
Desafios 437

Respostas dos exercícios e testes 438

Parte 6 — GEOMETRIA

26 GEOMETRIA ESPACIAL DE POSIÇÃO 441

1. Introdução 441
2. Noções primitivas e postulados 441
3. Determinação de retas e planos 442
4. Posições relativas 444
5. Perpendicularidade 447
6. Projeções ortogonais sobre um plano 450
7. Distâncias geométricas 451
8. Ângulos 453

Testes de vestibulares 455
Desafio 456

27 POLIEDROS 457

1. Introdução 457
2. Os poliedros 457
3. Relação de Euler 458
4. Poliedros de Platão 459
5. Poliedros regulares 461

Testes de vestibulares 462
Desafio 462

28 ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS 463

1. Conceito 463
2. Área do retângulo 463
3. Área do quadrado 464
4. Área do paralelogramo 464
5. Área do triângulo 466
6. Área do trapézio 470
7. Área do losango 470
8. Área do polígono regular 471
9. Área do círculo 473

Testes de vestibulares 477
Desafios 481

29 PRISMA 482
1. Conceito 482
2. Elementos 482
3. Classificação 482
4. Paralelepípedo 483
5. Áreas e volume 487
Testes de vestibulares 490
Desafios 492

30 PIRÂMIDE 493
1. Conceito 493
2. Elementos 493
3. Classificação 493
4. Áreas e volume 495
5. Tetraedro regular 497
6. Tronco de pirâmide 499
Testes de vestibulares 503
Desafios 505

31 CILINDRO 506
1. Conceito 506
2. Elementos 506
3. Classificação 506
4. Áreas e volume 507
5. Seção meridiana e cilindro eqüilátero 508
Testes de vestibulares 511
Desafios 513

32 CONE 514
1. Conceito 514
2. Elementos 514
3. Classificação 514
4. Áreas e volume 515
5. Seção meridiana e cone eqüilátero 516
6. Tronco de cone 518
Testes de vestibulares 521
Desafios 523

33 ESFERA 524
1. Conceitos 524
2. Elementos 525
3. Área e volume 525
4. Fuso esférico 526
5. Cunha esférica 526
Testes de vestibulares 529
Desafios 531

Respostas dos exercícios e testes 532

Parte 7 — GEOMETRIA ANALÍTICA

34 ○ O PONTO 537

1. Introdução 537
2. O plano cartesiano 537
3. Distância entre dois pontos 538
4. Ponto médio de um segmento 539
5. Condição de alinhamento de três pontos 540

Testes de vestibulares 542
Desafios 543

35 ○ A RETA 544

1. Introdução 544
2. A equação geral da reta 544
3. A equação reduzida da reta 546
4. Retas que passam por um ponto dado 548
5. Outras formas de equação da reta 549
6. Analogia com a função afim 551
7. Interseção de retas 552
8. Paralelismo 554
9. Perpendicularidade 555
10. Inequações do 1º grau com duas variáveis 556
11. Ângulos entre retas 559
12. Distância entre ponto e reta 560
13. Área de um triângulo 561
14. Bissetrizes dos ângulos de duas retas 563

Testes de vestibulares 564
Desafios 568

36 ○ A CIRCUNFERÊNCIA 569

1. A equação reduzida da circunferência 569
2. A equação geral da circunferência 571
3. Posições relativas entre ponto e circunferência 573
4. Inequações do 2º grau com duas incógnitas 575
5. Posições relativas entre reta e circunferência 576
6. Problemas de tangência 578

Testes de vestibulares 580
Desafios 583

37 ○ AS CÔNICAS 584

1. Elipse 584
2. Hipérbole 588
3. Parábola 591

Testes de vestibulares 594
Desafios 596

Respostas dos exercícios e testes 597

Parte 8 — ÁLGEBRA III

38 ○ NÚMEROS COMPLEXOS 603

1. Introdução 603
2. Igualdade entre números complexos 606
3. Operações com números complexos 606
4. Potências de *i* 611
5. Plano de Argand-Gauss 612
6. Módulo 614
7. Argumento 615
8. Forma trigonométrica ou polar 616
9. Operações na forma trigonométrica 618
10. Potenciação em $\mathbb{C}$ 620
11. Radiciação em $\mathbb{C}$ 621

Testes de vestibulares 624
Desafios 625

39 ○ POLINÔMIOS 626

1. Função monomial 626
2. Função polinomial 626
3. Adição, subtração e multiplicação de polinômios 629
4. Divisão de polinômios 630
5. Divisão por binômios do tipo x – a 632
6. Divisões sucessivas 636

Testes de vestibulares 638
Desafios 639

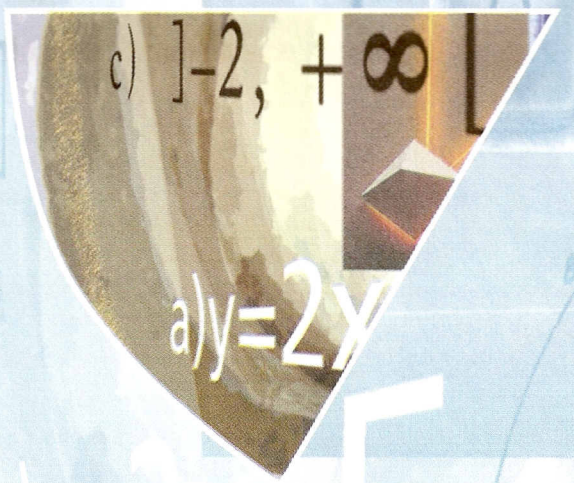
40 ○ EQUAÇÕES POLINOMIAIS OU ALGÉBRICAS 640

1. Introdução 640
2. Noções iniciais 640
3. Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) 641
4. Teorema da decomposição 641
5. Multiplicidade de uma raiz 644
6. Raízes complexas 645
7. Relações de Girard 647
8. Raízes racionais 649

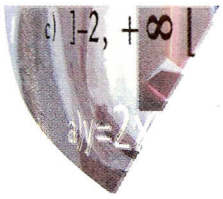
Testes de vestibulares 651
Desafios 653

Respostas dos exercícios e testes 654

• ÁLGEBRA I •



Parte I



1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

1 ○ Introdução

Certos conjuntos cujos elementos são números que guardam entre si algumas características comuns são aqui denominados *conjuntos numéricos*.

Tais conjuntos possuem os elementos perfeitamente caracterizados. Neste capítulo serão estudados, entre os conjuntos numéricos, o conjunto dos números naturais, o dos inteiros, o dos racionais, o dos irracionais e, por fim, o dos números reais.

O surgimento do conjunto dos números naturais deveu-se à necessidade de se contarem os objetos; os outros conjuntos, em geral, foram surgindo, também por necessidade, como ampliações daqueles até então conhecidos.

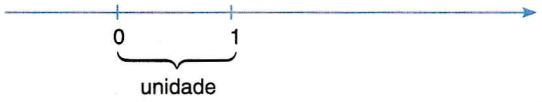
2 ○ O conjunto ℕ

É o *conjunto dos números naturais*:

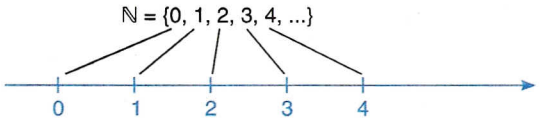
$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\},$$

em que n representa o elemento genérico do conjunto.

Os conjuntos numéricos aqui apresentados podem ser representados geometricamente por meio de pontos de uma reta, a chamada *reta numerada*. Escolhemos sobre ela um ponto de origem (correspondente ao número zero), uma unidade de medida e uma orientação (geralmente para a direita).



No caso particular do conjunto ℕ, marcamos sobre a reta outros números naturais, respeitando a unidade de medida:



O conjunto dos números naturais possui alguns subconjuntos importantes:

▶ **1º** O conjunto dos números naturais não nulos:

$$N^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\};\ N^* = N - \{0\}$$

▶ **2º** O conjunto dos números naturais pares:

$$\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}, \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

▶ **3º** O conjunto dos números naturais ímpares:

$$\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, \ldots, 2n + 1, \ldots\}; \text{ com } n \in \mathbb{N}$$

▶ **4º** O conjunto dos números primos:

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

Conjunto fechado em relação a uma operação

Quando em um conjunto pode ser efetuada uma determinada operação entre quaisquer elementos do conjunto e o resultado da operação é um número que também pertence ao conjunto, dizemos que tal conjunto é fechado em relação à operação.

No caso do conjunto $\mathbb{N}$, temos, por exemplo:

$$\forall m, n \in \mathbb{N}: \; m + n \in \mathbb{N}$$
$$m \cdot n \in \mathbb{N}$$

Assim, $\mathbb{N}$ é fechado em relação à adição e à multiplicação.

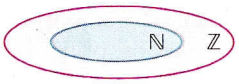
O mesmo não ocorre, porém, com a subtração; por exemplo, não existe número natural x tal que $x = 3 - 7$. Assim, $\mathbb{N}$ não é fechado em relação à subtração. Por esse motivo, fez-se necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{N}$, surgindo o conjunto dos números inteiros.

3 ○ O conjunto $\mathbb{Z}$

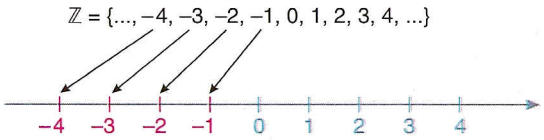
É o *conjunto dos números inteiros*:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

Todos os elementos de $\mathbb{N}$ pertencem também a $\mathbb{Z}$, o que equivale a dizer que $\mathbb{N}$ é subconjunto de $\mathbb{Z}$: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z} \supset \mathbb{N}$.



A representação geométrica do conjunto dos inteiros é feita a partir da representação de $\mathbb{N}$ na reta numerada; basta acrescentar os pontos correspondentes aos números negativos:



O conjunto dos números inteiros possui alguns subconjuntos notáveis:

▶ **1º** O conjunto dos números inteiros não nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}; \; \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$$

▶ **2º** O conjunto dos números inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$\mathbb{Z}_+$ é o próprio conjunto dos números naturais: $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}$.

▶ **3º** O conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

▶ 4º O conjunto dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

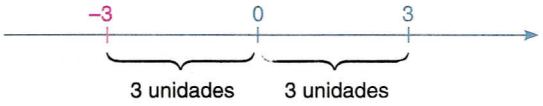
▶ 5º O conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\ldots, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

Números opostos

Dois números inteiros são ditos *opostos* um do outro quando apresentam soma zero; assim, os pontos que os representam distam igualmente da origem.

Podemos tomar como exemplo o número 3: o oposto de 3 é –3 e o oposto de –3 é 3, pois $3 + (-3) = (-3) + 3 = 0$.



Dizemos, em geral, que o oposto — ou simétrico — de a é $-a$, e vice-versa; particularmente, o oposto de zero é o próprio zero.

Módulo de um número inteiro

Damos o nome de módulo, ou valor absoluto, de x à distância entre a origem e o ponto que representa o número x.

Por exemplo, dizemos que o módulo de –3 é 3, e que o módulo de 3 também é 3; indicamos $|-3| = |3| = 3$.

Exercícios

1 Determine $A \cap B$ e $A \cup B$, sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x < 7\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\}$.

2 Escreva por meio de uma propriedade característica o conjunto $D \cap E$, sendo $D = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ e $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid 8 \leq x \leq 11\}$.

3 Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $0 \in \mathbb{N}^*$
b) $0 \notin \mathbb{Z}^*$
c) $-3 \in \mathbb{Z}$
d) $\mathbb{Z}_+ \supset \mathbb{N}$
e) $5 - 9 \in \mathbb{N}$
f) $9 - 5 \in \mathbb{Z}$
g) $9 - 5 = 5 - 9$
h) O conjunto dos números naturais é finito.
i) O conjunto $\mathbb{Z}$ possui mais elementos que o conjunto $\mathbb{N}$.

4 Calcule:

a) $5 - (-3 + 2) - 1 - |-3 - 4|$
b) $-3 - \{-2 + 3 \cdot [-4 + (-1 + 3)]^2 - 1\} - 1$
c) $|9 - |3 + 11| \,| - |1 - 6|$

5 a) Qual a condição para que dois números inteiros a e b sejam simétricos?
b) Qual a condição para que dois números inteiros distintos c e d possuam módulos diferentes?

4 O conjunto $\mathbb{Q}$

O conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado em relação às operações adição, multiplicação e subtração, mas o mesmo não acontece em relação à divisão: embora $(-15) : (+3) = -5 \in \mathbb{Z}$, não existe número inteiro x para o qual se tenha $x = (+3) : (-15)$. Por esse motivo fez-se necessária uma ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$, da qual surgiu o conjunto dos números racionais.

O conjunto $\mathbb{Q}$, dos racionais, é inicialmente descrito como o conjunto dos quocientes entre dois números inteiros:

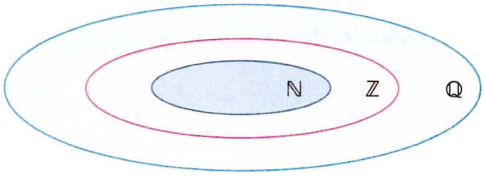
$$\mathbb{Q} = \left\{0, \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \ldots, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{5}, \ldots, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{3}{4}, \ldots\right\}$$

Outra forma, mais simples, de denotar o conjunto dos racionais, é:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

Assim, definimos $\mathbb{Q}$ como o conjunto das frações $\frac{p}{q}$; desse modo, um número é racional quando pode ser escrito como uma fração $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$.

Quando $q = 1$, temos $\frac{p}{q} = \frac{p}{1} = p \in \mathbb{Z}$, o que mostra que $\mathbb{Z}$ é subconjunto de $\mathbb{Q}$; assim, podemos construir o diagrama:



No conjunto $\mathbb{Q}$ destacam-se os seguintes subconjuntos:

$\mathbb{Q}^*$: conjunto dos racionais não nulos;
$\mathbb{Q}_+$: conjunto dos racionais não negativos;
$\mathbb{Q}_+^*$: conjunto dos racionais positivos;
$\mathbb{Q}_-$: conjunto dos racionais não positivos e
$\mathbb{Q}_-^*$: conjunto dos racionais negativos.

O conjunto $\mathbb{Q}$ é fechado para as operações adição, multiplicação e subtração. O conjunto $\mathbb{Q}^*$ é fechado para a divisão.

Representação dos números racionais

Os elementos de $\mathbb{Q}$ apresentam-se normalmente como frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{100}$, etc. Há, porém, outra representação dos números racionais; é a forma decimal.

As frações $\frac{1}{4}$, $\frac{7}{40}$ e $\frac{31}{8}$, por exemplo, podem ser representadas por 0,25, 0,175 e 3,875, respectivamente. Esses números, por conterem na representação decimal mais simples um número finito de algarismos, são chamados *decimais exatos*.

Para escrever, por exemplo, a fração $\frac{1}{8}$ na forma decimal, basta dividir o numerador 1 pelo denominador 8:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 8 \\ \hline 120 & 0{,}125 \\ 1240 & \\ 1240 & \end{array}$$

resto nulo ↔ decimal exato

Processo inverso:

$$0{,}125 = \frac{125}{1\underbrace{000}_{3\text{ zeros}}} = \frac{1}{8}$$

($\underbrace{\ }_{3\text{ casas}}$)

Outro exemplo: $\frac{7}{200} = 0{,}035$:

$$\begin{array}{r|l} 700 & 200 \\ \hline 1000 & 0{,}035 \\ 100 & \end{array}$$

← resto nulo

Processo inverso:

$$0{,}035 = \frac{35}{1\underbrace{000}_{3\text{ zeros}}} = \frac{070}{200}$$

($\underbrace{\ }_{3\text{ casas}}$)

Em alguns casos, porém, não se obtém resto nulo em nenhuma etapa da divisão. Nessas ocasiões aparecem as *dízimas periódicas*, que são marcadas pela repetição infinita de algarismos após a vírgula.

A fração $\frac{11}{6}$, por exemplo, apresenta essa característica. Vejamos:

$$\begin{array}{r|l} 11 & 6 \\ \hline 50 & 1{,}833\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ 2 & \\ \vdots & \end{array}$$

O algarismo 3 repete-se indefinidamente e o número $\frac{11}{6} = 1{,}833\ldots = 1{,}8\overline{3}$ é uma dízima periódica, na qual o período é constituído pelo algarismo 3.

Outro exemplo: a fração $\frac{113}{22}$.

$$\begin{array}{r|l} 113 & 22 \\ \hline 30 & 5{,}13636\ldots \\ 80 & \\ 40 & \\ 80 & \\ 140 & \\ \vdots & \end{array}$$

período: 36

notação: $\frac{113}{22} = 5{,}13636\ldots = 5{,}1\overline{36}$

Em cada caso, a fração que dá origem à dízima periódica é chamada *fração geratriz* da dízima.

Inversamente, no caso de termos a dízima periódica, é possível achar a sua fração geratriz. Veja os exemplos.

Exemplo 1

Seja a dízima periódica $0{,}\overline{5} = 0{,}555\ldots = x$.

Podemos fazer:

$$10x = 5{,}55\ldots \quad \text{e} \quad 9x = 10x - x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{9}$$

A fração $\frac{5}{9}$ é a fração geratriz da dízima $0{,}\overline{5}$.

Exemplo 2

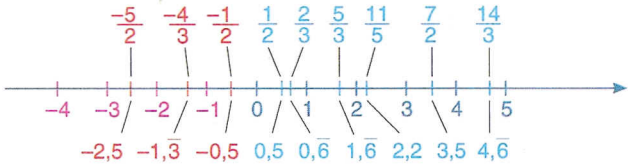
Seja, agora, a dízima periódica $y = 2{,}1\overline{90}$.

Fazendo $1000y = 2190{,}\overline{90}$ e $10y = 21{,}\overline{90}$, obtemos $990y = 2169$ e aparece a fração geratriz: $y = \frac{2169}{990}$.

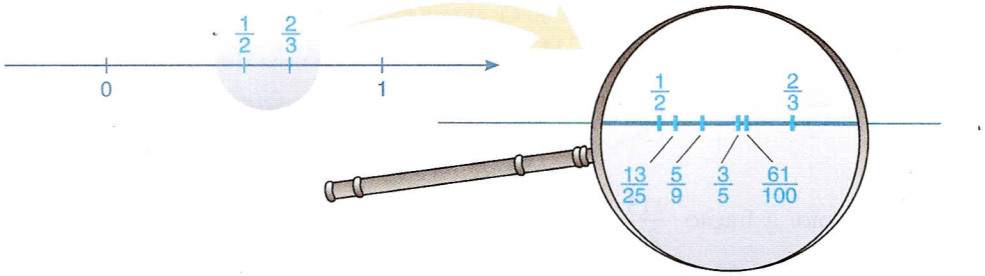
Como 2169 e 990 não são primos entre si, ou seja, mdc (2169, 990) = 9 ≠ 1, convém simplificar a fração: $y = \frac{241}{110}$.

Representação geométrica do conjunto dos números racionais

Daremos outros exemplos de números racionais e os localizaremos na reta numerada, que já contém alguns números inteiros assinalados:



Podemos notar que entre dois inteiros consecutivos existem infinitos números racionais e também que entre dois racionais quaisquer há infinitos racionais. Por exemplo, entre os racionais $\frac{1}{2} = 0{,}5$ e $\frac{2}{3} = 0{,}\overline{6}$, podemos encontrar os racionais $\frac{13}{25} = 0{,}52$, $\frac{5}{9} = 0{,}\overline{5}$, $\frac{3}{5} = 0{,}6$ e $\frac{61}{100} = 0{,}61$, entre outros.



Inverso de um número racional

Dois números são ditos inversos um do outro quando o produto entre eles resulta em 1.

Por exemplo, $\frac{4}{5}$ é o inverso de $\frac{5}{4}$ (e vice-versa) *ou* 0,8 é o inverso de 1,25 (e vice-versa).

0 é o único racional que não possui inverso.

Exercícios

6 Assinale *V* ou *F*:

a) $\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$

b) $\frac{7}{3} - 1 \notin \mathbb{Q}$

c) $-\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

d) $0{,}222\ldots \in \mathbb{Q}$

e) $0{,}\overline{9} \in \mathbb{Z}$

f) $-\frac{14}{7} \notin \mathbb{Q}$

7 Represente o racional *nove décimos* de dois modos diferentes.

8 Escreva na forma decimal cada uma das frações:

a) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{2}{50}$ e) $\frac{1120}{200}$

b) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{1}{30}$ f) $\frac{38}{60}$

9 Encontre a fração geratriz de cada dízima periódica:

a) $0,\overline{4}$ c) $1,\overline{81}$ e) $0,2\overline{34}$

b) 1,777... d) $18,\overline{1}$ f) $1,24\overline{15}$

10 (UF-CE) Se $\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}} = \frac{p}{q}$, sendo p e q números inteiros positivos relativamente primos, determine p + q.

11 Apresente de duas formas diferentes o resultado de $3 \cdot \left(0,\overline{1} + 2,2 - \frac{2}{3}\right)$.

12 Ache a fração geratriz do inverso de 1,5.

13 Encontre três números racionais compreendidos entre $0,\overline{8}$ e $\frac{97}{99}$.

14 Multiplique $0,54\overline{16}$ por 24; a seguir, dê a representação decimal do racional $\frac{26}{48}$.

5 ○ O conjunto 𝕀

Assim como existem números decimais que podem ser escritos como frações — com numerador e denominador inteiros —, que são os números racionais de que acabamos de tratar, há os que não admitem tal representação. São os números decimais não exatos que possuem representação infinita, porém não periódica.

Vejamos alguns exemplos:

1. O número 0,15725312... não é dízima periódica, pois os infinitos algarismos após a vírgula não se repetem periodicamente.
2. O número 1,101112... também não comporta representação fracionária (com numerador e denominador inteiros), pois não é dízima periódica.
3. Os números $\sqrt{2}$ = 1,4142135..., $\sqrt{3}$ = 1,7320508..., e = 2,7182818... e π = 3,141592..., por não apresentarem representação infinita periódica, também não são números racionais.

Um número cuja representação decimal infinita não é periódica é chamado *número irracional*, e seu conjunto é representado por 𝕀.

6 ○ O conjunto ℝ

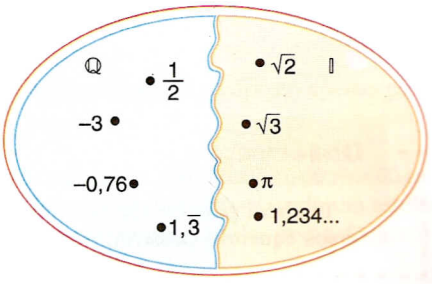
O conjunto formado pelos números racionais *e* pelos números irracionais é chamado *conjunto dos números reais* e é representado por ℝ.

Assim, temos:

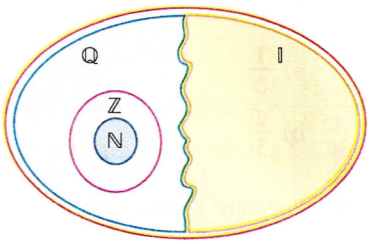
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \text{ sendo } \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$$

↓

Se um número real é racional, não é irracional, e vice-versa.



Lembrando ainda que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, podemos construir o diagrama ao lado.



Além desses ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$), o conjunto dos números reais apresenta outros subconjuntos importantes:

- **1º** O conjunto dos números reais não nulos:

$$\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

- **2º** O conjunto dos números reais não negativos:

$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$$

- **3º** O conjunto dos números reais positivos:

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

- **4º** O conjunto dos números reais não positivos:

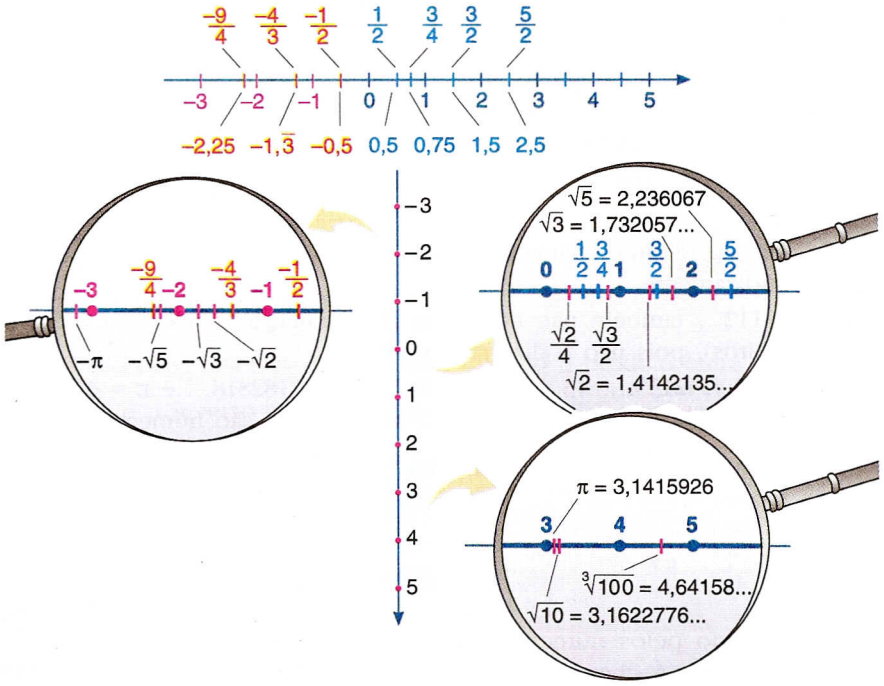
$$\mathbb{R}_- = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$$

- **5º** O conjunto dos números reais negativos:

$$\mathbb{R}_-^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$$

Representação geométrica dos números reais

Retomemos a reta numerada, com alguns números racionais (inteiros ou não) já assinalados:



Observação

Também para os números reais utilizamos os conceitos de módulo, números opostos e números inversos (quando possível) apresentados para os outros conjuntos.

Exercícios

15 Disponha em ordem crescente os números reais:

a) $\frac{17}{18}$, 1, $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\frac{18}{19}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $1,\overline{1}$.

b) $0,\overline{9}$, $\frac{98}{99}$, $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{99}{98}$, $\frac{4\sqrt{3}}{7}$, 1, $\frac{\sqrt{10}}{3}$ e $\frac{\pi}{\sqrt{10}}$.

16 Destaque, entre os números apresentados no exercício anterior, dois pares de números inversos.

17 Efetue a divisão de:

a) 7 por $0,\overline{7}$.

b) $\frac{5}{11}$ por 6,25.

18 a) $\frac{\sqrt{50}}{5}$ é o dobro de qual número real?

b) $\frac{\sqrt{18}}{11}$ é o triplo de qual número real?

19 Seja $\frac{p}{q}$ a fração geratriz da dízima periódica $0,2\overline{4}$. A fração irredutível equivalente a $\frac{2q}{3p}$ representa outra dízima. Apresente-a, bem como sua fração geratriz.

20 Qual é o inverso de $0,\overline{73}$? E de $-0,\overline{3}$?

21 Para facilitar os cálculos dos vestibulandos, um examinador, numa questão de trigonometria de um vestibular, escreveu a frase "Adote $\pi = \frac{22}{7}$, com boa aproximação". Qual foi a impropriedade cometida por ele?

22 (UF-MS, adaptado)

a) $A = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ é número inteiro?

b) $B = \sqrt[3]{-0,064}$ é número racional ou irracional?

23 (UF-AL) Assinale as afirmações verdadeiras (*V*) e as falsas (*F*), nas quais *n* é um número inteiro estritamente positivo.

a) O mínimo múltiplo comum entre 4n e 6n é 12n.
b) O número $n^2 + 7n + 7$ é sempre ímpar.
c) O número $n \cdot (n^2 - 1)$ é sempre divisível por 3.

24 Sendo $y = 1 : 0,1$ e $x = 2 : 0,1$, mostre que $A = \sqrt{\frac{x}{y}}$ e $B = \sqrt{\frac{x(y-1)}{y}}$ são irracionais, mas que $A \cdot B$ é racional.

25 Sendo $q = 5 \cdot 10^2$, obtenha o menor e o maior valor de *p* na fração irredutível $\frac{p}{q}$, de tal modo que $\pi < \frac{p}{q} < \sqrt{10}$.

26 Apresente um número real compreendido entre os números $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ e $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

27 Mostre que o número $x = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ é racional.

28 (UF-RJ) Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.

29 (PUC-SP) Um lojista dispõe de três peças de um mesmo tecido, cujos comprimentos são 48 m, 60 m e 80 m. Nas três peças o tecido tem a mesma largura. Deseja vender o tecido em retalhos iguais, cada um tendo a largura das peças e o maior comprimento possível, de modo a utilizar todo o tecido das peças. Quantos retalhos ele deverá obter?

7 ○ Intervalos reais

O conjunto dos números reais possui também subconjuntos, denominados *intervalos*, que são determinados por meio de desigualdades. Sejam os números reais a e b, com $a < b$.

▶ **1º** Intervalo aberto de extremos a e b é o conjunto $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Exemplo

$$]3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x < 5\}$$

Note as "bolinhas vazias".

▶ **2º** Intervalo fechado de extremos a e b é o conjunto $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$

Exemplo

$$[3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x \leqslant 5\}$$

Note as "bolinhas cheias".

▶ **3º** Intervalo aberto à direita (ou fechado à esquerda) de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

Exemplo

$$[3, 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leqslant x < 5\}$$

▶ **4º** Intervalo aberto à esquerda (ou fechado à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

Exemplo

$$]3, 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 5\}$$

Existem ainda os intervalos infinitos:

▶ **5º** $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a\}$

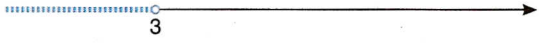
Exemplo

$$]-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$$

▶ **6º** $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

Exemplo

$$]-\infty, 3[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$$



▶ **7º** $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant a\}$

Exemplo

$$[3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 3\}$$

▶ **8º** $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$

Exemplo

$$]3, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$$

Observação

Às vezes são utilizados ( ) em lugar de] [para indicar extremidades abertas nos intervalos:

$[a, b[= [a, b)$, $]a, b] = (a, b]$ e $]a, b[= (a, b)$

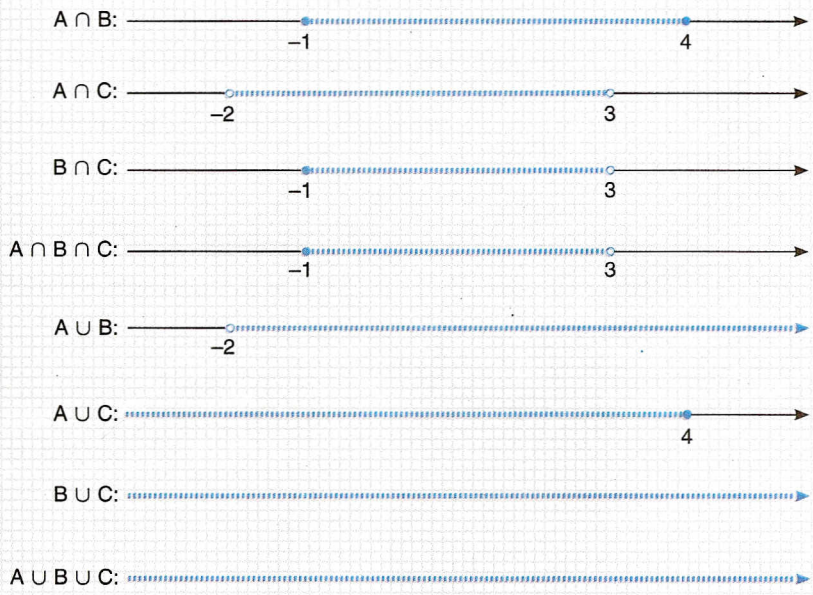
Na resolução de inequações e de outros problemas em que são necessárias operações como união, interseção, etc. entre intervalos, devemos utilizar a representação gráfica.

Vejamos um exemplo.

Exemplo 3

Dados os intervalos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ e $C =]-\infty, 3[$, podemos representá-los assim:

Daí, temos, por exemplo:



Exercícios

30 Faça a representação gráfica de cada um dos seguintes intervalos:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \sqrt{2}\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3\}$

d) $D = [1, 5[$

e) $E = (-2, 4]$

f) $F = (-\infty, -3]$

31 Descreva cada um dos conjuntos abaixo por meio de uma propriedade característica dos seus elementos:

a) $G = \left[-5, -\frac{5}{3}\right[$

b) $H =]-\infty, -2)$

c) $I =]3, +\infty[$

d) J:

e) K:

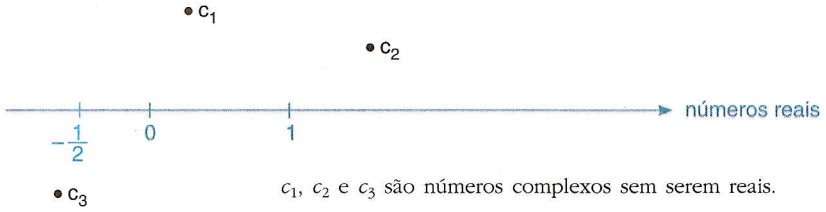
32 Determine $L \cup M$ e $L \cap M$, sendo $L = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x \geq 2\}$ e $M =]-3, 3[$.

33 Ache $S \cap T$, sendo $S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $T = \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$.

8 Outro conjunto importante

Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta numerada e os números reais, ou seja, a cada número real corresponde um ponto da reta, e vice-versa.

Há, porém, outros números, como por exemplo $\sqrt{-2}$, $\sqrt[4]{-5}$ e $\sqrt{-1}$, que *não são reais* e transcendem a reta numerada, isto é, não podem ser representados na reta.



c_1, c_2 e c_3 são números complexos sem serem reais.

Tais números são chamados *complexos* e constituem o conjunto C, que contém o conjunto dos reais e será objeto de estudo no capítulo 38.

Testes de vestibulares

1 (Unifor-CE) Considerando-se os conjuntos $\mathbb{Z}$, dos números inteiros, e $\mathbb{Q}$, dos números racionais, qual dos números seguintes *não* pertence ao conjunto $(\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}) - (\mathbb{Z} \cap \mathbb{Q})$?

a) $-\frac{2}{3}$ d) $\frac{3}{5}$

b) $-0{,}777\ldots$ e) 2,0123

c) 0

2 (UCDB-MT) Assinale a sentença verdadeira:

a) $\mathbb{Z}_- \cap \mathbb{Z}_+ = 0$ d) $-\sqrt{12} \notin \mathbb{R}$

b) $0{,}323323332\ldots \in \mathbb{Q}$ e) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{Z}_-$

c) $\mathbb{Z}_+^* \subset \mathbb{N}$

3 (PUC-RJ) O valor de $\sqrt{2{,}777\ldots}$ é:

a) 1,2

b) 1,666...

c) 1,5

d) um número entre $\frac{1}{2}$ e 1

e) 3,49

4 (UFF-RJ) O número $\pi - \sqrt{2}$ pertence ao intervalo:

a) $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ d) $(-1, 1)$

b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ e) $\left[-\frac{3}{2}, 0\right)$

c) $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

5 (U. E. Londrina-PR) Seja o número inteiro AB, no qual A e B são os algarismos das dezenas e das unidades, respectivamente.

Invertendo-se a posição dos algarismos A e B, obtém-se um número que excede AB em 27 unidades.

Se A + B é um quadrado perfeito, B é igual a:

a) 3 d) 6

b) 4 e) 7

c) 5

6 (UF-PI) Se $x = 1{,}333\ldots$ e $y = 0{,}1666\ldots$, então $x + y$ é igual a:

a) $\frac{7}{5}$ c) $\frac{13}{9}$ e) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{68}{45}$ d) $\frac{4}{3}$

7 (Cefet-PR) São dados os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é ímpar$\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 4\}$ e $C = \{x \in \mathbb{Z}_+^* \mid x < 6\}$. O conjunto D, tal que $D = (A \cap B) - C$, é:

a) $\{-3, -2, -1, 0, 7, 9\}$ d) $\{-3, -1\}$

b) ϕ e) $\{1, 3\}$

c) $\{2, 4, 5\}$

8 (UTP-PR) O número $\frac{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$ é:

a) irracional negativo.

b) natural.

c) racional mas não inteiro.

d) inteiro negativo.

e) n.d.a.

9 (Unifor-CE) Nos trabalhos científicos, números muito grandes ou muito próximos de zero são escritos em *notação científica*, que consiste em um número x, $1 < x < 10$, multiplicado por uma potência de 10. Escrevendo-se o número 0,0000052 em notação científica, obtém-se:

a) $5{,}2 \times 10^{7}$ d) $5{,}2 \times 10^{-7}$

b) $0{,}52 \times 10^{-7}$ e) 52×10^{-8}

c) $5{,}2 \times 10^{-6}$

10 (UF-SE) Se α e β são números racionais tais que $\alpha + \beta\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^3$, então:

a) $\alpha - \beta = 2$ c) $\frac{\alpha}{\beta} = 2$ d) $\alpha\beta = 2$

b) $\alpha + \beta = 2$ e) $\alpha = \beta$

11 (Fepam-MG) Se $x \in \mathbb{R}$ é tal que o inverso de $x - \sqrt{3}$ é $x + \sqrt{3}$, então x^2 vale:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

12 (PUC-MG) Na reta real da figura, estão representados os números 0, a, b e 1. O ponto P que corresponde ao número $\frac{b}{a}$ está:

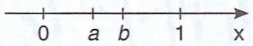
a) à esquerda de 0.

b) entre 0 e a.

c) entre a e b.

d) entre b e 1.

e) à direita de 1.



13 (Unisant'Anna-SP) Se x e y são números reais tais que $x > y > 0$, é correto afirmar que:

a) $\sqrt{x} > \sqrt{y}$ c) $-y < -x$

b) $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ d) $x - 6 < y - 6$

e) $y^2 > x^2$

14 (Mackenzie-SP) Se k é um número real maior que zero, então $\frac{1}{\sqrt{k^2 + 1} - k}$:

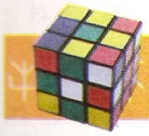
a) diminui quando k aumenta.

b) é menor que 0.

c) está entre 0 e k.

d) está entre k e $2k$.

e) é maior que $2k$.



Desafios

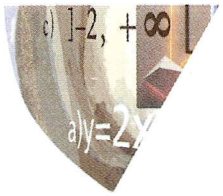
Agência Estado

1 O novo Código de Trânsito de um país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas; em caso de infringência às leis do trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima.

a) Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes foi autuado por infração gravíssima?

b) Entre todas as pontuações de 0 a 100 pontos, quantas delas não podem ocorrer? Quais são?

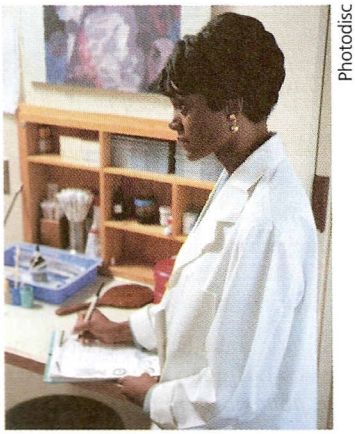
2 Mostre que o número $x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \ldots}}}$ é inteiro.



2 FUNÇÕES

1 ○ Introdução

No estudo científico de muitos fatos é comum que se procure identificar grandezas mensuráveis e, em seguida, estabelecer as relações existentes entre essas grandezas. Vejamos alguns exemplos.



Photodisc

Exemplo 1

Quando quer fazer um estudo da variação da temperatura em certa cidade, o Instituto de Meteorologia mede a temperatura a intervalos regulares, por exemplo a cada 2 horas, e monta uma tabela que relaciona entre si as grandezas hora e temperatura. Vamos supor que a tabela seja assim:

Hora	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Temperatura	7°	5°	3°	2°	5°	12°	18°	20°	20°	15°	11°	8°	6°

A cada hora corresponde uma única temperatura. Dizemos, por isso, que a temperatura é *função* da hora.

Exemplo 2

Uma barraca de praia, em Fortaleza, vende copos de sucos naturais ao preço de R$ 0,80 cada. Para não ter de fazer contas a toda hora, o proprietário da barraca montou a seguinte tabela:

Número de copos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Preço (R$)	0,80	1,60	2,40	3,20	4,00	4,80	5,60	6,40	7,20	8,00

Nesse exemplo estão sendo medidas duas grandezas: o número de copos de suco e o respectivo preço. A cada quantidade de copos corresponde um único preço. Dizemos, por isso, que o preço é *função* do número de copos de suco. Aqui é possível achar uma fórmula que estabelece a relação de interdependência entre o preço (y) e o número de copos de suco (x):

$$y = 0{,}80 \cdot x$$

Exemplo 3

Para fretar um ônibus de excursão com 40 lugares, paga-se, ao todo, R$ 360,00. Quanto cada passageiro deverá pagar se a lotação do ônibus não for completa?

Para achar a quantia que cada um deverá desembolsar (y), basta dividir o preço total (R$ 360,00) pelo número de passageiros (x). A fórmula que relaciona y com x é:

$$y = \frac{360}{x}$$

Observe na tabela a correspondência entre x e y:

x	4	12	15	18	20	24	36	40
y	90,00	30,00	24,00	20,00	18,00	15,00	10,00	9,00

Exemplo 4

Um automóvel está percorrendo uma estrada à velocidade constante de 120 km/h (que equivale a 2 km/min).

O passageiro que vai ao lado do motorista começa a anotar, de minuto em minuto, a distância percorrida, que aparece no painel. O resultado pode ser observado na tabela abaixo.

Instante (min) (momento da leitura)	0	1	2	3	4	5	...
Distância (km)	0	2	4	6	8	10	...

A cada instante (x) corresponde uma única distância percorrida (y). Dizemos, por isso, que a distância é *função* do instante. A fórmula que relaciona y com x é:

$$y = 2x$$

Exercícios

1 A tabela relaciona o tempo gasto por um funcionário de uma empresa para digitar um certo número de páginas de um relatório:

Número de páginas	Tempo (em minutos)
1	15
2	30
3	45
4	60

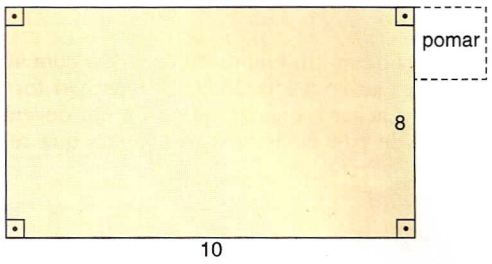
a) O tempo (t) de serviço é função do número de páginas digitadas (n)? Encontre a lei que relaciona t e n.
b) Em quanto tempo serão digitadas 20 páginas?
c) Se o funcionário trabalhar 8 horas, será possível concluir um trabalho de digitação de 35 páginas? Explique.

2 Uma videolocadora lançou uma promoção que consiste no pagamento de uma taxa mensal fixa e um adicional de R$ 2,00 por qualquer fita alugada. A tabela seguinte informa a conta mensal de quatro clientes.

Clientes	Número de fitas alugadas	Valor mensal pago (em reais)
A	3	20,00
B	8	30,00
C	12	38,00
D	20	54,00

a) Qual é o valor da taxa fixa cobrada?
b) Como se expressa o valor das despesas mensais (y) de um cliente que alugou x fitas no mês?
c) Com R$ 71,00, qual é o número máximo de fitas que podem ser alugadas?

3 Uma casa ocupa um terreno retangular de 10 m por 8 m. Seu proprietário decidiu comprar um lote quadrado a fim de fazer um pomar, conforme indica a figura (o lado do quadrado não pode superar a largura do terreno).



a) Construa uma tabela que forneça o valor total da área do terreno, quando o lado do lote comprado for de 2 m, 3,5 m, 5 m e 6 m.

b) Qual será a área A do terreno quando o lado do lote for de x metros? ($x \leqslant 8$)

c) Qual é o valor da área máxima que o terreno pode ter?

4 (Cefet-MG, adaptado) Uma bomba de água é ligada para encher uma piscina de 4 600 litros, inicialmente vazia. A tabela informa o volume de água na piscina em alguns instantes:

Tempo (em minutos)	Volume (em litros)
1	23
2	46
3	69
4	92
5	115

a) Qual é a vazão de água lançada por essa bomba, em litros por minuto?

b) Em quanto tempo a piscina estará cheia?

c) Como expressamos o volume (v) de água necessário para *encher* a piscina após t minutos de funcionamento da bomba?

5 Em uma experiência sobre deterioração de alimentos, constatou-se que a população de certo tipo de bactéria dobrava a cada hora. No instante em que começaram as observações, havia 50 bactérias na amostra.

a) Qual é a população de bactérias após 2 horas do início da experiência? E após 4 horas?

b) Obtenha a lei que relaciona o número de bactérias (n) em função do tempo (t).

c) Dê uma estimativa do número de bactérias após 1 dia de observação. (Use a aproximação: $2^{10} \sim 10^3$.)

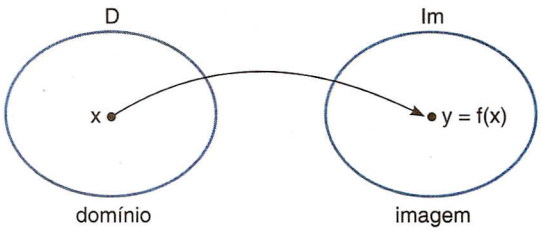
2 ○ Definição

Em Matemática, se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma **função** de x.

O conjunto D de valores que podem ser atribuídos a x é chamado *domínio* da função. A variável x é chamada *variável independente*.

O valor de y, correspondente a determinado valor atribuído a x, é chamado *imagem* de x pela função e é representado por $f(x)$. A variável y é chamada *variável dependente*, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x.

O conjunto *Im* formado pelos valores que y assume, em correspondência aos valores de x, é chamado *conjunto imagem* da função. Esquematicamente, temos:



3 ○ Funções definidas por fórmulas

Existe um interesse especial no estudo de funções em que y pode ser calculado a partir de x por meio de uma fórmula (ou regra, ou lei).

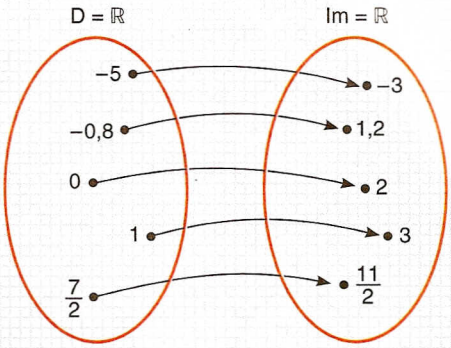
Exemplo 5

A lei de correspondência que associa cada número real x ao número y, sendo y a soma de x com 2, é uma função definida pela fórmula $y = x + 2$, ou $f(x) = x + 2$.

O domínio e o conjunto imagem dessa função são iguais a $\mathbb{R}$.

Nessa função temos:

- para $x = 1$, vem $y = 1 + 2 = 3$; dizemos que $f(1) = 3$.
- a imagem de $x = -5$ é $f(-5) = -5 + 2 = -3$.
- $x = \frac{7}{2}$ corresponde a $y = \frac{7}{2} + 2 = \frac{11}{2}$.
- $y = 1{,}2$ é a imagem de $x = -0{,}8$.



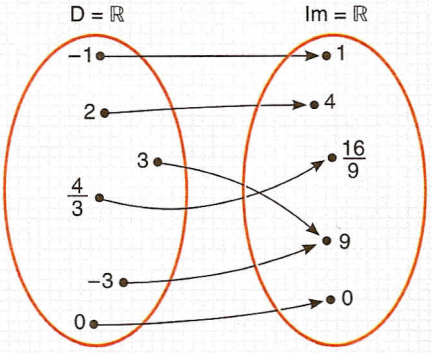
Exemplo 6

A regra que associa a cada número real x o número y, sendo y o quadrado de x, é $y = x^2$, ou $f(x) = x^2$.

Trata-se de uma função de domínio $\mathbb{R}$ e conjunto imagem iguais a $\mathbb{R}_+$.

Nessa função temos:

- para $x = 2$, vem $y = 2^2 = 4$. Dizemos que $f(2) = 4$.
- a imagem de -1 é $f(-1) = (-1)^2 = 1$.
- para $x = \frac{4}{3}$, vem $y = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; então $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{16}{9}$.
- $y = 9$ é imagem de $x = 3$ ou de $x = -3$.



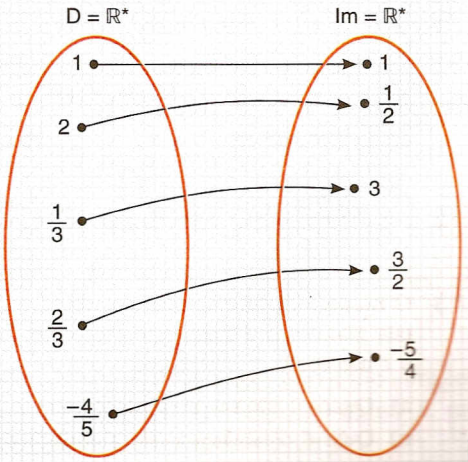
Exemplo 7

A lei $y = \frac{1}{x}$ associa a cada x real diferente de 0 o real y tal que $y = \frac{1}{x}$.

Trata-se de uma função cujo domínio é $\mathbb{R}^*$. Pode-se mostrar que seu conjunto imagem é $\mathbb{R}^*$.

Nessa função temos:

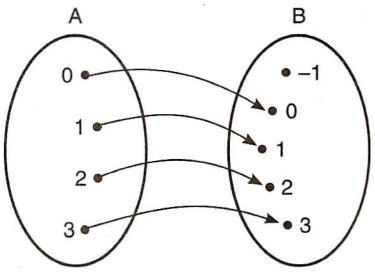
- para $x = 2$, vem $y = \frac{1}{2}$.
- a imagem de $x = \frac{1}{3}$ é $y = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.
- $x = \frac{2}{3}$ está em correspondência com $y = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.
- $y = -\frac{5}{4}$ é a imagem de $x = -\frac{4}{5}$.



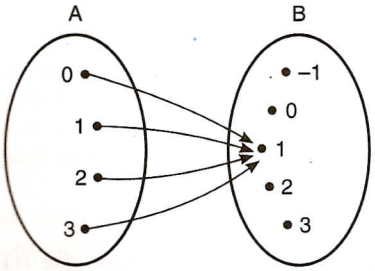
Exercícios

6 Verifique se cada um dos esquemas abaixo representam, ou não, uma função de A = {0, 1, 2, 3} em B = {–1, 0, 1, 2, 3}. Justifique sua resposta.

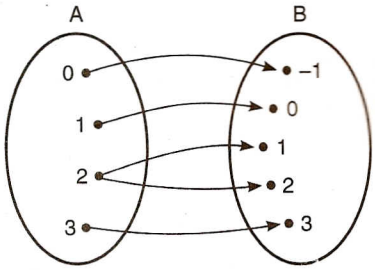
a)



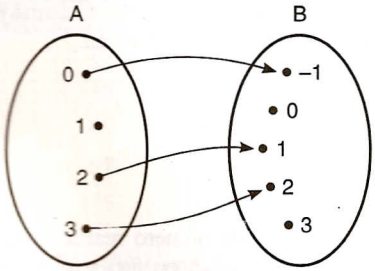
c)



b)



d)



7 Sejam A = {2, 4, 8, 12} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. A lei que associa cada elemento de *A* a sua metade, em *B*, define uma função? Represente num diagrama.

8 Sejam A = {–1, 0, 1, 2} e B = {–2, –1, 0, 1, 2, 3, 4}. Em cada caso, verifique se a lei dada define uma função de *A* com valores em *B*:

a) $f(x) = 2x$ b) $f(x) = x^2$ c) $f(x) = 2x + 1$

9 Seja *f* uma função com domínio nos naturais, dada por $f(n) = 3n + 4$.

a) Calcule f(2) e f(10). b) Existe f(–1)?

10 Seja *f* uma função com domínio real, dada pela lei $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Calcule:

a) f(0) b) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ c) f(–1) d) $f(\sqrt{5})$

11 Seja *f* uma função de domínio nos reais, definida por $f(x) = -2x + m$, em que *m* é um número real fixo. Sabendo que f(3) = –8, determine:

a) o valor de m b) f(–5) c) o valor de *x* tal que f(x) = 0

12 Seja a função real definida por $f(x) = \frac{3x - 4}{7}$. Qual é o elemento do domínio que tem $\frac{2}{3}$ como imagem?

13 O número de alunos matriculados em uma escola de esportes é função do tempo, e a lei que relaciona tais grandezas é dada por $n(t) = 4t^2 - t + 50$, em que n(t) é o número de alunos dessa escola daqui a *t* meses.

a) Quantos alunos essa escola terá daqui a dois meses?

b) Qual é o acréscimo de alunos registrado do sexto para o sétimo mês?

14 Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = -3x + 2$ e $g(x) = 2x - 4$. Determine:

a) $f(2) + g(1)$ b) $\frac{f(0) + g(5)}{f(-2)}$ c) o valor de x tal que $f(x) = g(x)$

15 (Unicamp-SP) O preço unitário de um produto é dado por

$$p = \frac{k}{n} + 10, \text{ para } n \geq 1,$$

sendo k uma constante e n o número de unidades adquiridas.

a) Encontre o valor da constante k, sabendo-se que, quando foram adquiridas 10 unidades, o preço unitário foi de R$ 19,00.

b) Com R$ 590,00, quantas unidades do referido produto podem ser adquiridas?

16 A lei $f(x) = 2x^2 - 12x + 25$ representa o número de multas anuais (em milhares), indicado por $f(x)$, que serão aplicadas daqui a x anos, em uma certa cidade.

a) Quantas multas são aplicadas atualmente nessa cidade?

b) Quantas multas serão aplicadas daqui a 2 anos? E daqui a 5 anos?

c) Em quanto tempo serão aplicadas 57 000 multas?

17 (UMC-SP, adaptado) A produção de uma fábrica de televisores varia, mês a mês, com a fórmula

$$P(m) = 25(m - 3)^2 + 300,$$

em que $m = 1, 2, 3, \ldots$ corresponde, respectivamente, aos meses de janeiro, fevereiro, março, etc. Determine:

a) o número de televisores produzidos em março, junho e setembro, respectivamente;

b) os meses em que são produzidos 400 televisores.

4 ○ Domínio e contradomínio

Normalmente, para que uma função f esteja bem caracterizada, é necessário que se conheça a lei de correspondência que associa x (variável independente) a y (variável dependente), além do domínio de f.

Muitas vezes se faz referência a uma função f dizendo apenas qual é a lei de correspondência. Quando não é dado explicitamente o domínio D de f, deve-se subentender que D é formado por todos os números reais que podem ser colocados no lugar de x na lei de correspondência $y = f(x)$, de modo que, efetuados os cálculos, resulte um y real.

Vejamos alguns exemplos:

1. O domínio da função definida pela lei $y = 2x - 1$ é $\mathbb{R}$, pois, qualquer que seja o valor de x (real), o número $2x - 1$ também é real.
2. O domínio da função definida pela lei $y = \frac{x^2 - 5}{x - 2}$ é $\mathbb{R} - \{2\}$, pois, para todo x real diferente de 2, o número $\frac{x^2 - 5}{x - 2}$ é real.
3. O domínio da função $y = \sqrt{x}$ é $\mathbb{R}_+$, pois só para valores negativos de x é que $\sqrt{x}$ não é real.
4. A função $y = \frac{1}{x - 2} + \sqrt{x - 1}$ tem domínio $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1 \text{ e } x \neq 2\}$, pois y só é real se $x - 1 \geq 0$ e $x - 2 \neq 0$.

Quando uma função é dada por uma lei de correspondência $y = f(x)$, às vezes não é tão simples estabelecer o seu conjunto imagem. Nesses casos, é comum apresentar apenas o conjunto E, no qual poderão estar os valores de y. Esse conjunto E é chamado *contradomínio* de f.

Por exemplo, na função f, dada pela lei $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$, o domínio é $\mathbb{R} - \{1, -1\}$, pois $x^2 - 1 \neq 0$; para cada x do domínio, y é um número real que pode assumir valores não tão facilmente determináveis. Nesse caso, dizemos que f é uma função de $\mathbb{R} - \{1, -1\}$ em $\mathbb{R}$, em que $\mathbb{R}$ é o contradomínio de f, e indicamos por $f: \mathbb{R} - \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$.

Em geral, a notação $f: A \to B$ representa uma função com domínio dado pelo conjunto A e contradomínio dado por B.

Exercícios

18 Determine a notação de cada uma das seguintes funções reais:

a) f associa a cada número real seu dobro.
b) g associa cada número real a seu quadrado.
c) b associa cada número real a seu triplo menos 1.

19 (EEM-SP) Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ satisfaz à seguinte propriedade: $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$.

a) Determine $f(1)$.
b) Sabendo-se que $f(2) = 1$, determine $f(8)$.

20 Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 4x - 5$
b) $g(x) = -x^2 - 7x + 5$
c) $h(x) = \frac{1}{x - 1}$
d) $f(x) = \sqrt{x + 5}$

21 Estabeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x - 2}$
b) $g(x) = \frac{5x}{\sqrt[3]{x}}$
c) $h(x) = \frac{2}{\sqrt{2x - 1}}$

22 Determine o domínio da função cuja lei é $f(x) = \sqrt{x^4 + x^2 + 3}$.

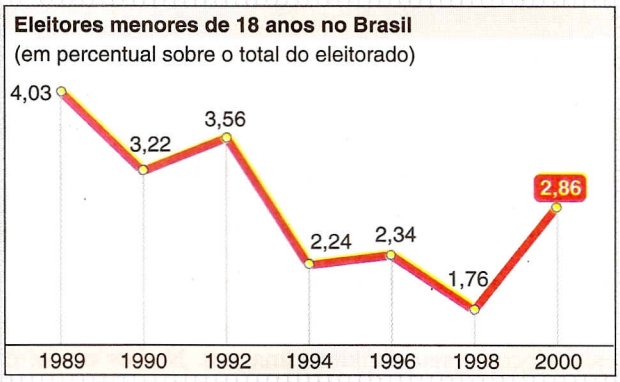
5 Gráficos

Vamos observar alguns gráficos retirados de jornais ou revistas, a partir dos quais podemos descobrir algumas propriedades das funções que eles representam.

Exemplo 8

Examinando o gráfico, podemos dizer que:

- em 1989, os eleitores menores eram 4,03% do eleitorado;
- em 1992, os eleitores menores eram 3,56% do eleitorado;
- de 1996 a 1998, o eleitorado dos menores decresceu (ou caiu) de 2,34% para 1,76%;
- de 1998 a 2000, esse eleitorado cresceu (ou subiu) de 1,76% para 2,86%.

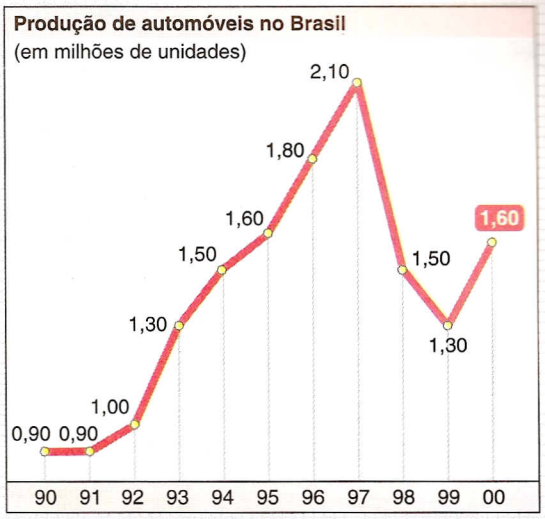


Fonte: *Folha de S.Paulo*, 17/9/2000.

Exemplo 9

Examinando o gráfico, podemos dizer que:

- a produção máxima ocorreu em 1997 (cerca de 2,10 milhões);
- a produção mínima ocorreu em 1990 e 1991 (cerca de 0,90 milhão);
- a produção cresceu continuamente de 1991 a 1997;
- a produção decresceu de 1997 a 1999 e retomou o crescimento de 1999 a 2000.

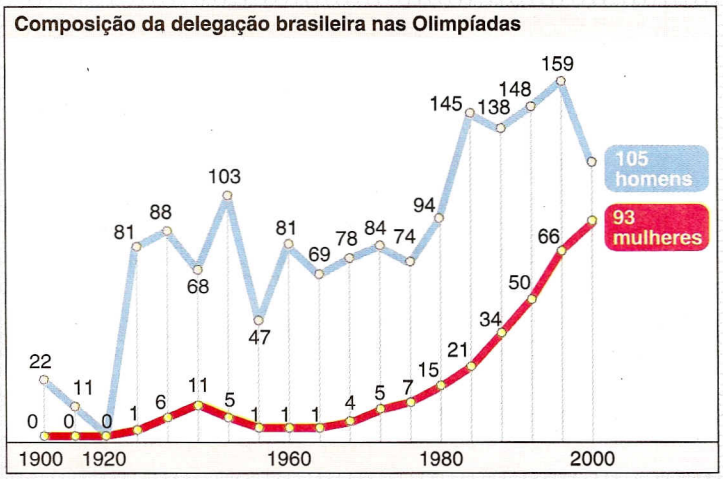


Fonte: *Folha de S. Paulo*, 7/12/2000.

Exemplo 10

Observando o gráfico, podemos dizer que:

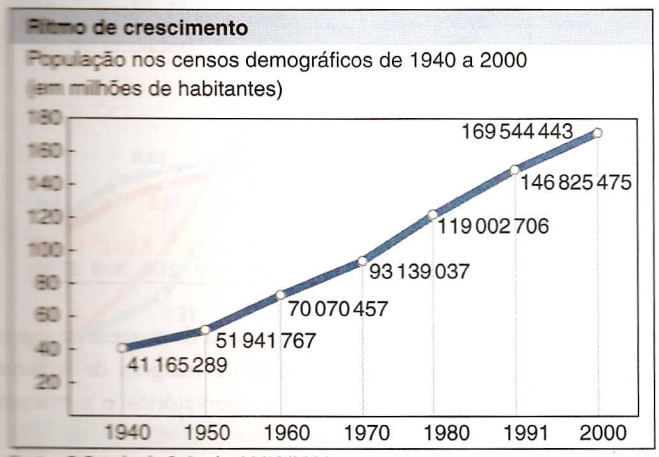
- o número de homens na delegação sempre foi superior ao de mulheres;
- o número de mulheres na delegação cresceu continuamente de 1960 a 2000;
- em 2000 o número de homens (105) e o número de mulheres (93) são próximos;
- de 1980 a 2000 a relação entre o número de homens e o de mulheres passou de cerca de 6:1 para cerca de 1,1:1.



Fonte: *Folha de S. Paulo*, 12/9/2000.

Exercícios

23



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 22/12/2000.

a) Identifique as variáveis envolvidas, destacando a dependente.
b) Qual a diferença entre a população brasileira registrada no censo de 2000 e a população registrada no censo de 1970?
c) A função representada é crescente?
d) Podemos dizer de modo exato que a população chegou a triplicar entre 1940 e 1980?

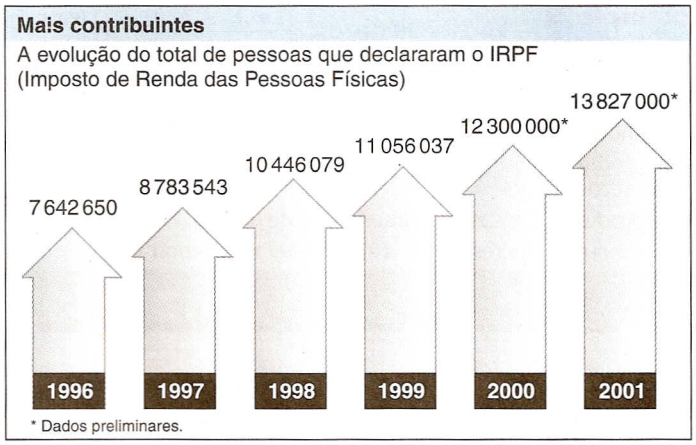
24 Assinale *V* ou *F*, justificando:

a) O gráfico ao lado representa uma função.

b) A cada ano aumenta o número de pessoas que declaram o imposto de renda.

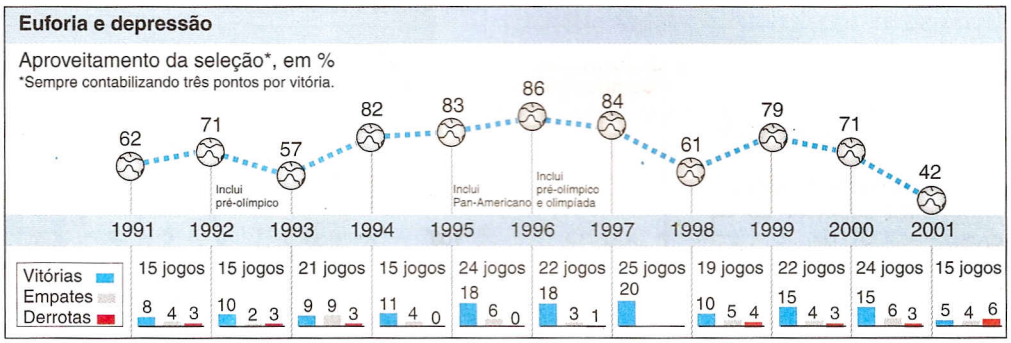
c) De 1997 a 1998 houve um acréscimo de mais de 1,5 milhão de declarações.

d) Se, a partir de 2001, o número de pessoas que declaram imposto de renda crescer à proporção de 1,8 milhão ao ano, em 2005 esse número ultrapassará 22 milhões.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 3/11/2001.

25



Fonte: *Folha de S. Paulo*, 29/7/2001.

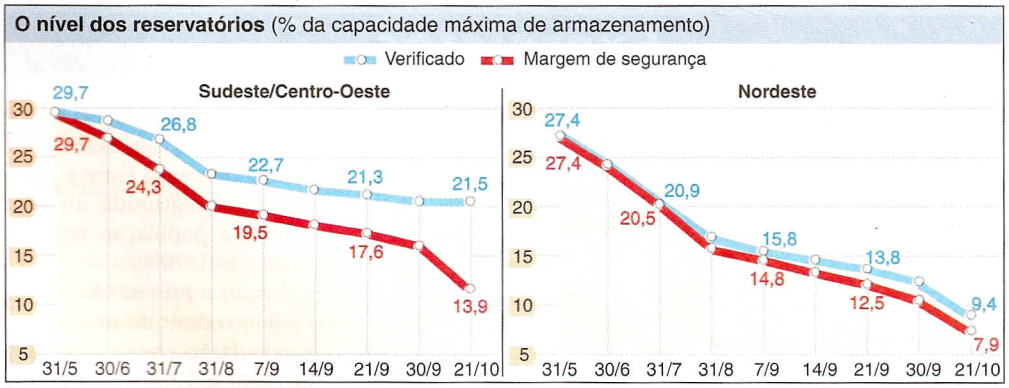
a) Em que períodos o aproveitamento da seleção foi crescente?

b) Em que anos foram registrados o melhor e o pior aproveitamento? Quais foram os valores máximo e mínimo registrados?

c) Em que anos o aproveitamento manteve-se acima de 65%?

d) Se em 1997 a seleção venceu 20 jogos, quantos jogos empatou e quantos jogos perdeu?

26 Acompanhe os gráficos referentes à crise energética de 2001 e, a seguir, assinale *V* ou *F* nas afirmações abaixo, justificando as falsas.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 23/10/2001.

a) Na Região Nordeste a capacidade dos reservatórios sempre esteve muito próxima da margem de segurança.

b) Em nenhuma das regiões a capacidade dos reservatórios ficou abaixo da margem de segurança.

c) No Sudeste e no Centro-Oeste, a diferença entre a capacidade dos reservatórios e a margem de segurança ficou praticamente constante nas datas consideradas.

d) Após 31 de maio, a data de 7 de setembro representou a situação mais crítica dos reservatórios no Nordeste.

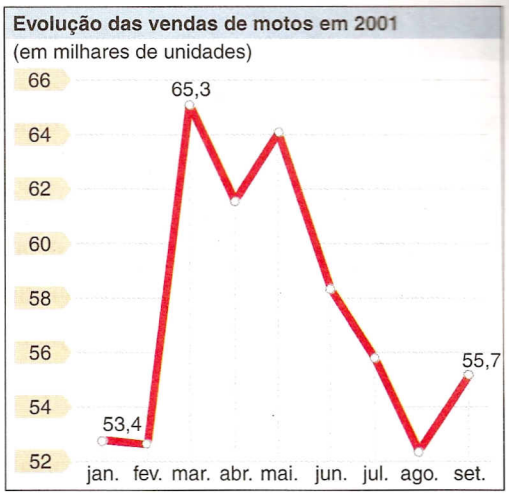
27 Com base no gráfico ao lado, responda:

a) Em que meses do ano foram vendidas mais de 58 000 motos?

b) Em que mês as vendas atingiram seu mínimo? E seu máximo?

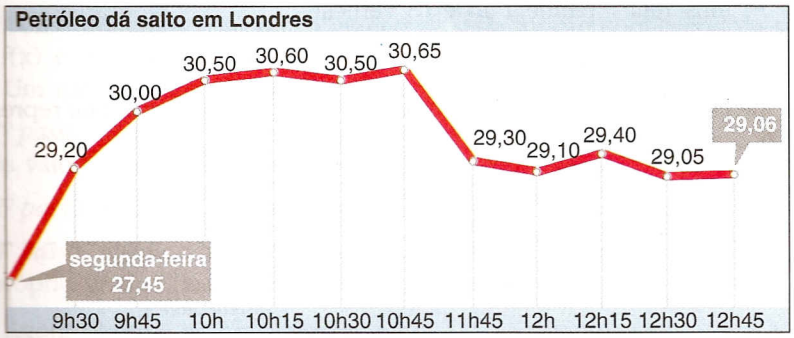
c) Considerando dois meses consecutivos, determine o período em que ocorreu a maior queda na venda de motos e dê uma estimativa para tal queda.

d) Compare o número de motos vendidas no primeiro trimestre com a quantidade vendida no segundo trimestre.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 10/10/2001.

28



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 12/9/2001.

O gráfico mostra a variação do preço do barril de petróleo na manhã de terça-feira de 11 de setembro de 2001, quando foram realizados os atentados terroristas em Nova Iorque e Washington.

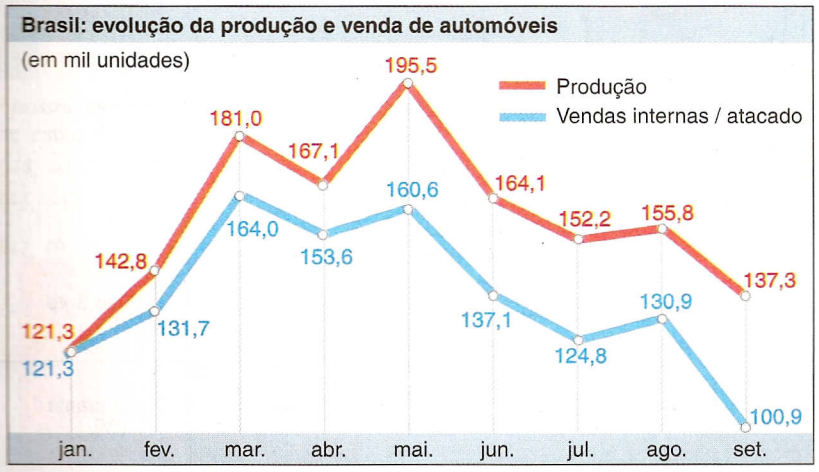
a) Qual foi a cotação de abertura do barril?

b) Qual foi a cotação máxima registrada nesse dia?

c) Entre que horários consecutivos foi registrada queda na cotação do barril?

d) Pode-se afirmar que o aumento percentual na cotação do barril (levando-se em consideração a cotação de segunda-feira e a do fechamento de terça-feira) foi superior a 5%?

29



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 5/10/2001.

a) Em que períodos a produção de automóveis cresceu?

b) Em que mês o número de veículos não vendidos foi maior? Qual foi esse número?

c) No período considerado, faça um gráfico correspondente à quantidade de veículos que permaneceram em estoque.

6 ○ Noções básicas de plano cartesiano

Um *par ordenado* de números é o conjunto formado por dois números em certa ordem. Usa-se a notação (a, b) para indicar o par ordenado em que *a* é o primeiro elemento e *b* é o segundo. Vejamos alguns exemplos:

1. (1, 3) é o par ordenado em que o primeiro elemento é 1 e o segundo é 3.
2. (3, 1) é o par ordenado em que o primeiro elemento é 3 e o segundo é 1.

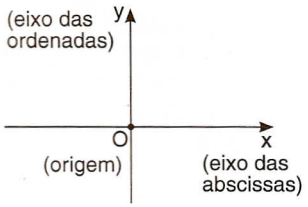
Note que os pares (1, 3) e (3, 1) diferem entre si pela ordem de seus elementos.

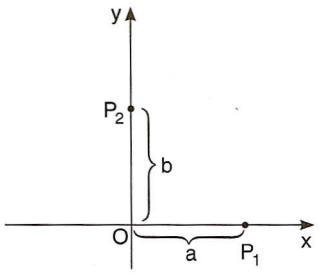
Existe uma maneira geométrica para representarmos o par ordenado (a, b):

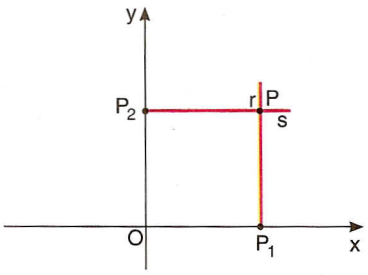
- *1º passo:* desenhamos dois eixos perpendiculares e usamos a sua interseção *O* como origem para cada um deles;
- *2º passo:* marcamos no eixo horizontal o ponto P_1, correspondente ao valor de *a*;
- *3º passo:* marcamos no eixo vertical o ponto P_2, correspondente ao valor de *b*;
- *4º passo:* traçamos por P_1 uma reta *r* paralela ao eixo vertical;
- *5º passo:* traçamos por P_2 uma reta *s* paralela ao eixo horizontal;
- *6º passo:* destacamos a interseção das retas *r* e *s* chamando-a de *P*, que é o ponto que representa graficamente o par ordenado (a, b).

Nomenclatura

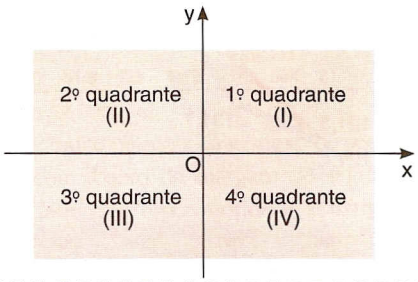
- O eixo horizontal (Ox) é o *eixo das abscissas*.
- O eixo vertical (Oy) é o *eixo das ordenadas*.
- O ponto *O* (interseção de Ox com Oy) é a *origem*.
- O plano que contém Ox e Oy é o *plano cartesiano*.





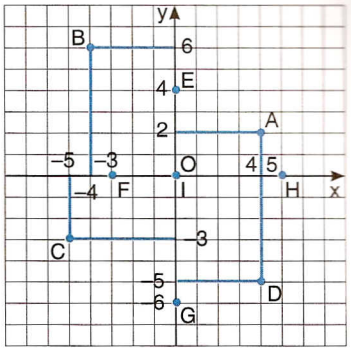


Cada uma das quatro partes em que fica dividido o plano pelos eixos cartesianos chama-se *quadrante*. A numeração dos quadrantes é feita no sentido anti-horário, a contar do quadrante correspondente aos pontos que possuem ambas as coordenadas positivas.



Exercícios

30 Dê as coordenadas de cada ponto do plano cartesiano ao lado.



31 Assinale no plano cartesiano os pontos A(2, –3), B(0, –4), C(–4, –5), D(–1, 0), E(0, 5), F(5, 4), G(3, 0), H(–3, 2), $I\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

32 Os pares ordenados (x + 2y, 2x – y) e (5, –3) são iguais. Determine x e y.

33 O ponto N de coordenadas (m – 2, 5) pertence ao eixo das ordenadas. Determine m.

7 Construção de gráficos

Como podemos construir o gráfico de uma função conhecendo a sua lei de correspondência y = f(x) e seu domínio D?

Um método bem simples é apresentado. Vejamos.

- *1º passo:* construímos uma tabela na qual aparecem os valores de x (variável independente) e os valores do correspondente y, calculados através da lei y = f(x).
- *2º passo:* representamos cada par ordenado (a, b) da tabela por um ponto do plano cartesiano.
- *3º passo:* ligamos os pontos construídos no passo anterior por meio de uma curva, que é o próprio gráfico da função y = f(x).

Agora observe os exemplos a seguir.

Exemplo 11

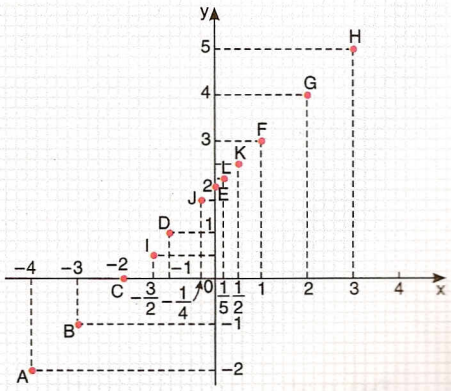
Vamos construir o gráfico da função y = x + 2 com domínio R.

- *1º passo:* damos a x alguns valores inteiros (por exemplo: –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3) e alguns valores fracionários $\left(\text{por exemplo: } -\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$, e calculamos y = x + 2. Teremos a tabela:

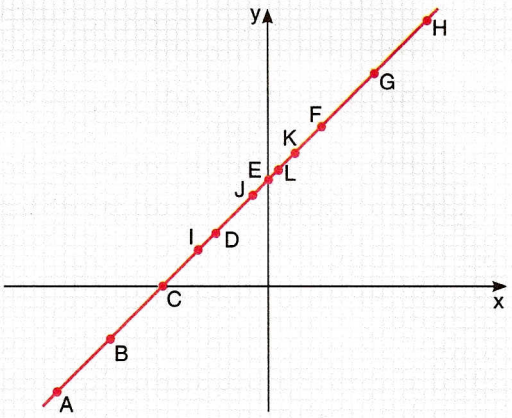
x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$
y	–2	–1	0	1	2	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{5}$

- *2º passo:* representamos os pares ordenados que estão nessa tabela por pontos:

A(–4, –2)
B(–3, –1)
C(–2, 0)
D(–1, 1)
E(0, 2)
F(1, 3)
G(2, 4)
H(3, 5)
$I\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$J\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right)$
$K\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
$L\left(\frac{1}{5}, \frac{11}{5}\right)$



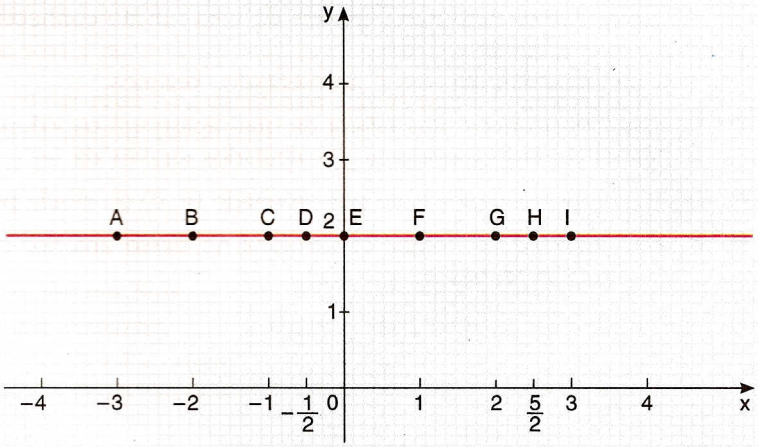
▶ *3º passo:* desenhamos a curva "provável" que contém os pontos que satisfazem a lei y = x + 2. É uma reta.



Exemplo 12

Vamos construir o gráfico da função y = 2 para todo x real.

x	y	Ponto
−3	2	A
−2	2	B
−1	2	C
$-\frac{1}{2}$	2	D
0	2	E
1	2	F
2	2	G
$\frac{5}{2}$	2	H
3	2	I

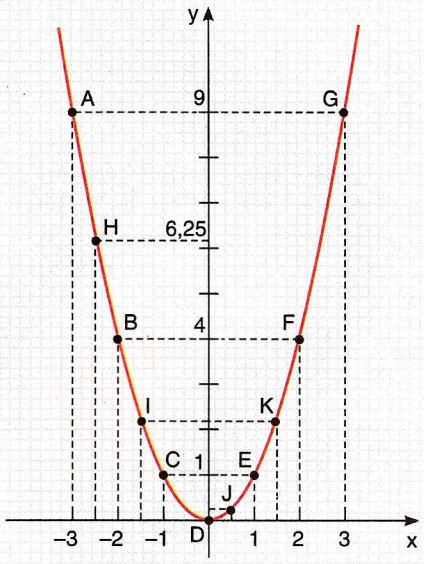


Esse é um exemplo de *função constante*. Seu gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

Exemplo 13

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2$ com domínio $\mathbb{R}$.

x	y	Ponto
−3	9	A
−2	4	B
−1	1	C
0	0	D
1	1	E
2	4	F
3	9	G
−2,5	6,25	H
−1,5	2,25	I
0,5	0,25	J
1,5	2,25	K



Essa curva é chamada *parábola*.

Exercícios

34 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $y = x$ b) $y = x + 3$ c) $y = -2x$ d) $y = -2$

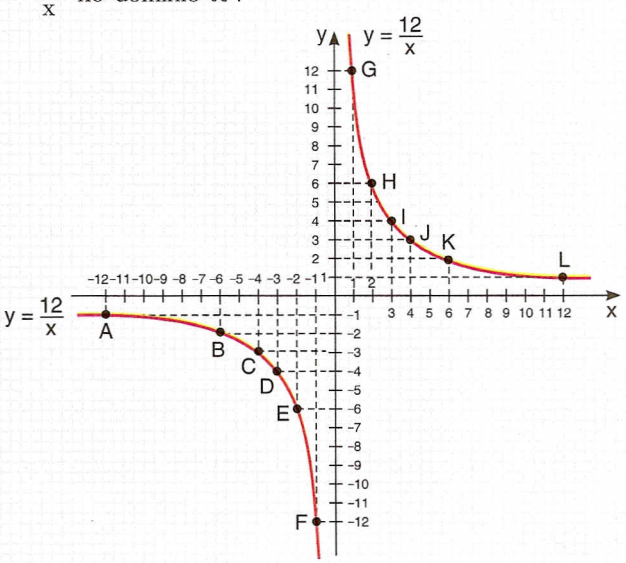
35 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $y = 2x^2$ b) $y = -x^2$ c) $y = x^2 - 1$ d) $y = x^2 - 2x$

Exemplo 14

Vamos construir o gráfico da função $y = \frac{12}{x}$ no domínio $\mathbb{R}^*$.

x	y	Ponto
–12	–1	A
–6	–2	B
–4	–3	C
–3	–4	D
–2	–6	E
–1	–12	F
1	12	G
2	6	H
3	4	I
4	3	J
6	2	K
12	1	L



Essa curva é chamada *hipérbole*.

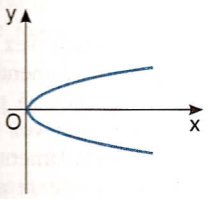
Exercícios

36 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

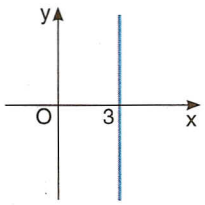
a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \frac{1}{x - 1}$ c) $y = x^3$

37 Explique por que os gráficos seguintes *não* representam funções.

a)



b)



38 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções:

a) $y = \sqrt{x}$ b) $y = \sqrt{x - 2}$

8 ○ Análise de gráficos

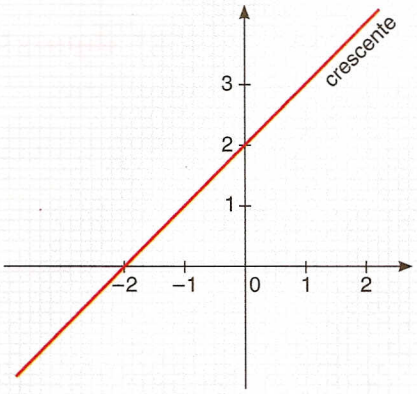
Muitas informações a respeito do comportamento de uma função podem ser obtidas a partir do seu gráfico.

Através dele, podemos ter uma visão do crescimento (ou decrescimento) da função, dos valores máximos (ou mínimos) que ela assume, de eventuais simetrias, do comportamento para valores de x muito grandes, etc.

Agora vamos analisar os gráficos já apresentados e observar os comportamentos das respectivas funções.

Exemplo 15

Observemos o gráfico da função $y = x + 2$.



Já vimos que esse gráfico é uma reta.

Quanto maior o valor dado a x, maior será o valor do correspondente $y = x + 2$. Dizemos, por isso, que essa função é *crescente*.

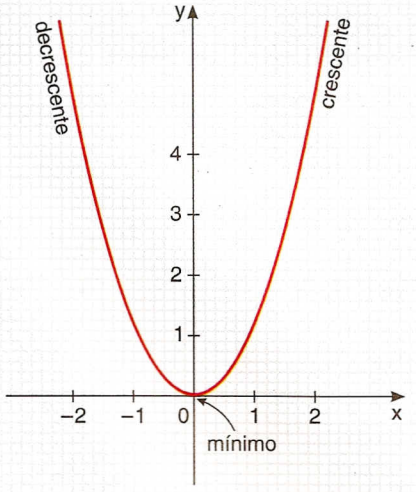
Quando os valores dados a x são cada vez maiores e positivos, os valores de $y = x + 2$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense. Basta, para isso, escolher um x suficientemente grande. Por exemplo, se quisermos $y > 1\,000\,000$, basta tomarmos $x > 999\,998$.

Por outro lado, quando os valores dados a x são cada vez menores e negativos, os valores de $y = x + 2$ decrescem ilimitadamente, e y pode tornar-se menor que qualquer número em que se pense. Basta, para isso, escolher um x suficientemente pequeno. Por exemplo, se quisermos $y < -2\,000\,000$, basta tomarmos $x < -2\,000\,002$.

Desse modo, o conjunto imagem dessa função é $Im = \mathbb{R}$.

Exemplo 16

Observemos o gráfico da função $y = x^2$.



Já vimos que esse gráfico é uma parábola.

Para $x \geqslant 0$, quanto maior o valor dado a x, maior será o valor do correspondente $y = x^2$.

Para $x \leqslant 0$, quanto maior o valor dado a x, menor será o valor do correspondente $y = x^2$.

Dizemos, então, que:

- para $x \geqslant 0$, essa função é *crescente*.
- para $x \leqslant 0$, essa função é *decrescente*.

Para $x = 0$, temos $y = 0$, e para $x \neq 0$, temos $y > 0$. Dizemos, por isso, que $x = 0$ é um ponto de *mínimo* da função.

Observe que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

Quando os valores dados a x são cada vez maiores e positivos, os valores de $y = x^2$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense.

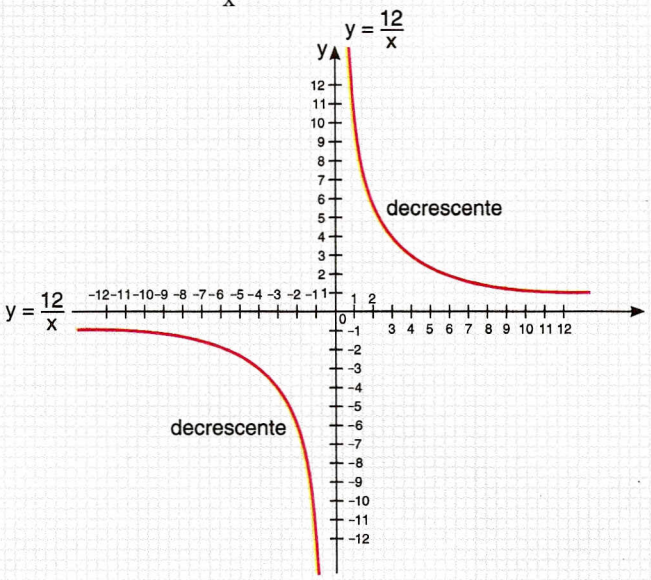
Quando os valores dados a x são cada vez menores e negativos, os valores de $y = x^2$ crescem ilimitadamente, e y pode tornar-se maior que qualquer número em que se pense.

Notamos também que $f(1) = 1$ e $f(-1) = 1$, $f(2) = 4$ e $f(-2) = 4$, $f(3) = 9$ e $f(-3) = 9$, etc.

De modo geral, $f(x) = x^2$ e $f(-x) = (-x)^2 = x^2$; portanto, $f(x) = f(-x)$ para todo x. Isso faz com que o gráfico seja simétrico em relação ao eixo y.

Exemplo 17

Observemos o gráfico da função $y = \frac{12}{x}$, com $x \neq 0$.



Já vimos que esse gráfico é uma hipérbole.

Para $x > 0$, essa função é decrescente, e para $x < 0$ ela também é decrescente.

Para os valores de x positivos e próximos de zero, os valores dos correspondentes y crescem ilimitadamente.

Vejamos a tabela:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
y	120	1 200	12 000	120 000	1 200 000

Para os valores de x negativos e próximos de zero, os valores dos correspondentes y decrescem ilimitadamente. Vejamos a tabela:

x	−0,1	−0,01	−0,001	−0,0001	−0,00001
y	−120	−1 200	−12 000	−120 000	−1 200 000

Quando x assume valores positivos cada vez maiores, os valores dos correspondentes y são positivos e cada vez menores, aproximando-se de zero. Vejamos a tabela:

x	10	100	1 000	10 000	100 000
y	1,2	0,12	0,012	0,0012	0,00012

Quando x assume valores negativos cada vez menores, os valores dos correspondentes y são negativos e cada vez mais próximos de zero. Vejamos a tabela:

x	−10	−100	−1 000	−10 000	−100 000
y	−1,2	−0,12	−0,012	−0,0012	−0,00012

Os passos anteriores mostram que Im = $\mathbb{R}^*$.

Notamos também que f(1) = 12 e f(−1) = −12; f(2) = 6 e f(−2) = −6; f(3) = 4 e f(−3) = −4; etc.

De modo geral, $f(x) = \frac{12}{x}$ e $f(-x) = \frac{12}{(-x)} = -\frac{12}{x} = -f(x)$; logo, $f(x) = -f(-x)$ para todo x; portanto, o gráfico é simétrico em relação à origem.

Resumo

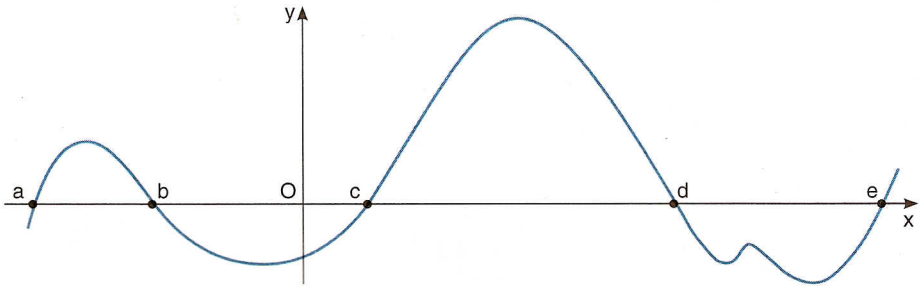
Analisando o gráfico de uma função qualquer y = f(x), podemos descobrir algumas propriedades notáveis. Vejamos:

1ª) *O sinal da função*

Os pontos de interseção do gráfico com o eixo Ox apresentam ordenadas y = 0, ou seja, suas abscissas x_0 são tais que $f(x_0) = 0$. Essas abscissas x_0 são os *zeros* ou *raízes* da função *f*.

Os pontos do gráfico situados acima do eixo Ox apresentam ordenadas $y > 0$, ou seja, suas abscissas x_0 acarretam $f(x_0) > 0$.

Já os pontos do gráfico situados abaixo do eixo Ox apresentam ordenadas $y < 0$, ou seja, suas abscissas x_0 acarretam $f(x_0) < 0$. Vejamos:



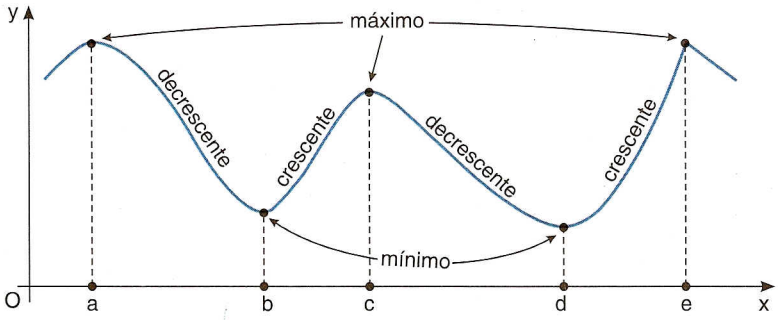
Nesse exemplo, temos:

- f(a) = 0, f(b) = 0, f(c) = 0, f(d) = 0 e f(e) = 0 (*a*, *b*, *c*, *d*, e *e* são as raízes).
- f(x) > 0 para a < x < b, para c < x < d ou para x > e.
- f(x) < 0 para x < a, para b < x < c ou para d < x < e.

2ª) Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um conjunto *A* (contido no domínio *D*), com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) < f(x_2)$, então *f* é *crescente* em *A*.

3ª) Se, para quaisquer valores x_1 e x_2 de um conjunto *A*, com $x_1 < x_2$ temos $f(x_1) > f(x_2)$, então *f* é *decrescente* em *A*.

Observe:



Nesse exemplo, *f* é crescente nos intervalos b < x < c e d < x < e, ao passo que *f* é decrescente nos intervalos a < x < b e c < x < d.

4ª) Seja *A* um subconjunto do domínio *D* e seja $x_0 \in A$.

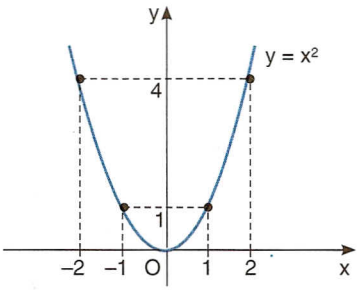
Se, para todo *x* pertencente a *A*, temos $f(x) \geq f(x_0)$, então x_0 é o ponto de *mínimo* de *f* em *A*, e $f(x_0)$ é o *valor mínimo* de *f* em *A*.

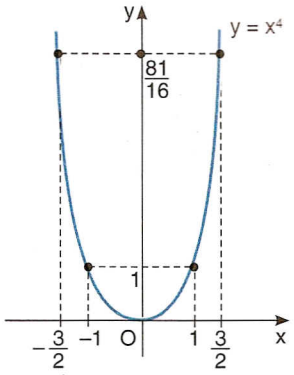
Se, para todo *x* pertencente a *A*, temos $f(x) \leq f(x_0)$, então x_0 é o ponto de *máximo* de *f* em *A*, e $f(x_0)$ é o *valor máximo* de *f* em *A*.

No exemplo anterior:

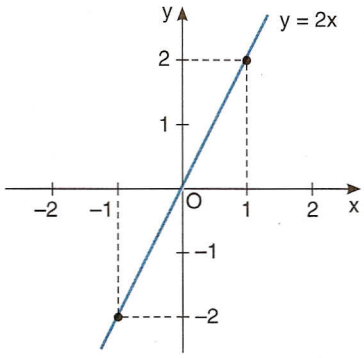
- *a*, *c* e *e* são pontos de máximo.
- *b* e *d* são pontos de mínimo.

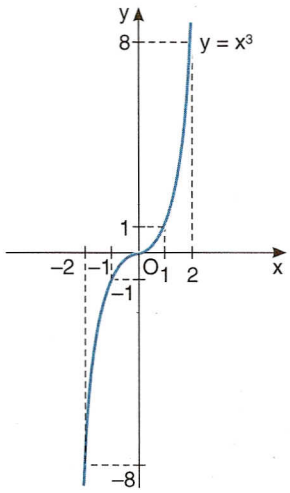
5ª) Se f(–x) = f(x) para todo x, então f tem o gráfico simétrico em relação ao eixo y. Nesse caso, dizemos que f é uma *função par*.





6ª) Se f(–x) = –f(x) para todo x, então f tem o gráfico simétrico em relação à origem. Nesse caso, dizemos que f é uma *função ímpar*.

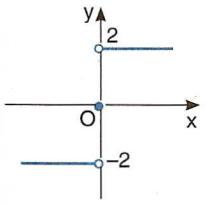




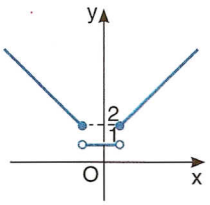
Exercícios

39 Determine a imagem de cada uma das funções representadas pelos gráficos abaixo:

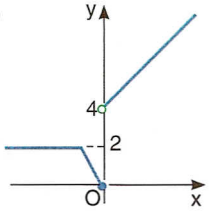
a)



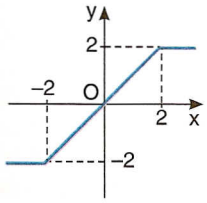
c)



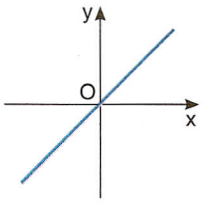
e)



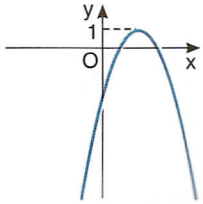
b)



d)

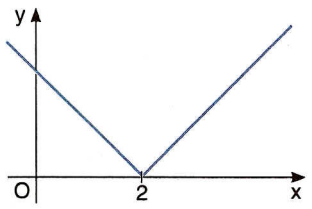


f)

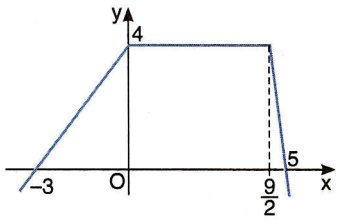


40 Em cada caso, o gráfico representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Especifique os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante:

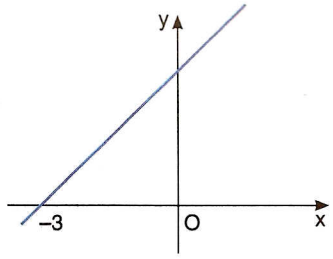
a)



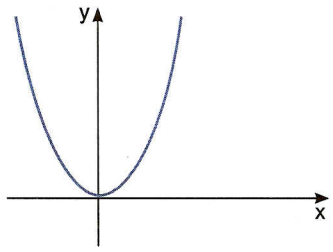
b)



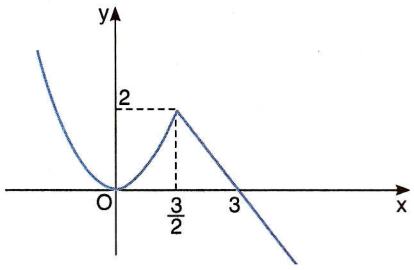
c)



d)



41 O gráfico representa uma função f definida em $\mathbb{R}$. Assinale V ou F nas sentenças seguintes, justificando as falsas:



a) $f(2) = \frac{3}{2}$

b) $f(4) > f(-1)$

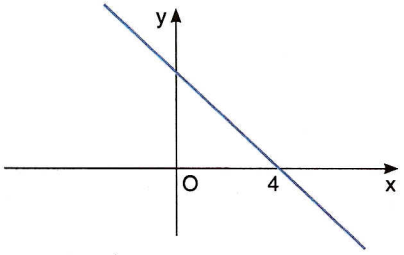
c) f é decrescente para $x \leq 0$ ou $x \geq \frac{3}{2}$.

d) As raízes de f são 0 e 3.

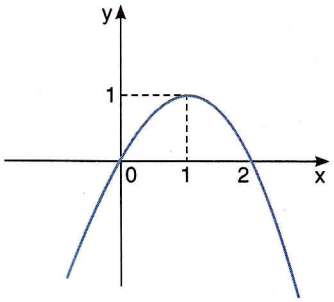
e) $f(-2) + f(2) = 0$

42 Estude o sinal de cada uma das funções cujos gráficos estão representados abaixo, destacando a(s) raiz(ízes), quando houver:

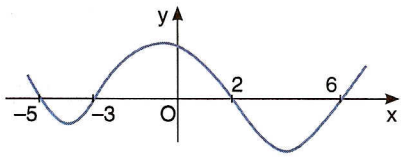
a)



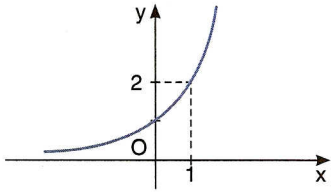
b)



c)



d)



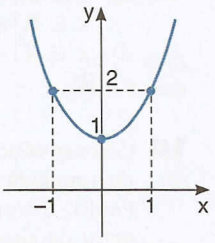
43 Assinale *P* se a função é par, *I* se a função é ímpar, ou *0* se a função não é par nem ímpar.

a) $f(x) = 2x$

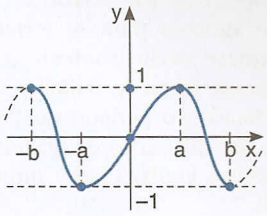
b) $f(x) = 3x^2$

c) $f(x) = 3x + 5$

d)

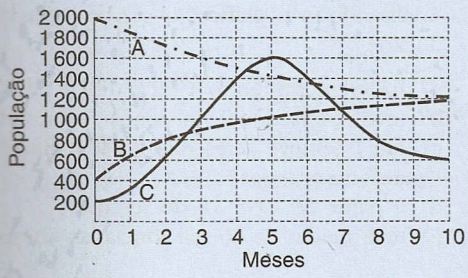


e)



Testes de vestibulares

1 (UF-ES) Num tanque, as variações na população de espécies de peixes *A*, *B* e *C* são descritas, no período de 10 meses, pelos gráficos abaixo:



Assinale a alternativa *correta*:

a) No período de 0 a 2 meses, a população *B* manteve-se menor que a *C*.

b) No quinto mês, havia menos de 3500 peixes nesse tanque.

c) No período de 0 a 5 meses, as populações *B* e *C* mantiveram-se crescentes.

d) A população *C* atingiu o seu máximo no terceiro mês.

e) No período de 3 a 7 meses, a população *B* manteve-se maior que a *A*.

2 (Uneb-BA) Para uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que satisfaz as condições

I. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

II. $f(1) = 3$,

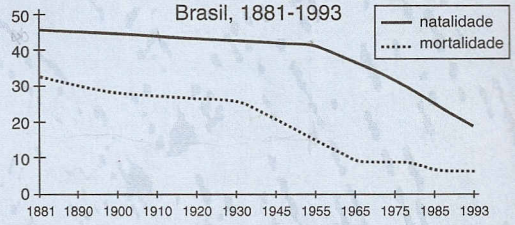
o valor de $f(3)$ é igual a:

a) 1 c) 6 e) 27

b) 3 d) 9

3 (UF-RS) A taxa de crescimento natural de uma população é igual à diferença entre as taxas de natalidade e mortalidade, cujas evoluções estão representadas no gráfico a seguir.

Evolução das taxas de natalidade e mortalidade (por mil)
Brasil, 1881-1993



Fontes: Censos demográficos e PNADs.
Fonte: Unicef. *A infância brasileira nos anos 90*. Brasília, nov. 1998.

Entre as opções abaixo, a maior taxa de crescimento natural da população ocorreu no ano de:

a) 1881 c) 1930 e) 1993

b) 1900 d) 1955

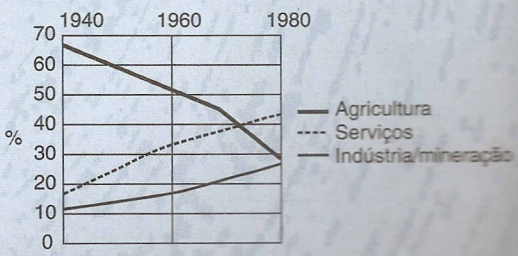
4 (UFF-RJ) Uma função real *f* de variável real é tal que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ e $f(x + 1) = x\,f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

O valor de $f\left(\frac{7}{2}\right)$ é:

a) π c) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ e) $\frac{\pi\sqrt{7}}{15}$

b) $7\sqrt{\pi}$ d) $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$

5 (Enem-MEC) O gráfico mostra a porcentagem da força de trabalho brasileira em 40 anos, com relação aos setores agrícola, de serviços e industrial/mineral.



A leitura do gráfico permite constatar que:

a) Em 40 anos, o Brasil deixou de ser essencialmente agrícola para se tornar uma sociedade quase exclusivamente industrial.
b) A variação da força de trabalho agrícola foi mais acentuada no período de 1940 a 1960.
c) Por volta de 1970, a força de trabalho agrícola tornou-se equivalente à industrial e de mineração.
d) Em 1980, metade dos trabalhadores brasileiros constituía a força de trabalho do setor agrícola.
e) De 1960 a 1980, foi equivalente o crescimento percentual de trabalhadores nos setores industrial/mineral e de serviços.

6 (UF-CE) Considere a função real definida por $f(x) = \frac{2x + 3}{\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}}$, $x \neq -\frac{3}{2}$.

Então o valor da soma $1 \cdot f(1) + 2 \cdot f(2) + 3 \cdot f(3) + \ldots + 20 \cdot f(20)$ é:

a) 120 c) 210 e) 1 260
b) 600 d) 620

7 (Unisinos-RS) Suponha que o número de carteiros necessários para distribuir, em cada dia, as correspondências entre as residências de um bairro seja dado pela função $f(x) = \frac{22x}{500 + 2x}$, em que x é o número de residências e f(x) é o número de carteiros.

Se foram necessários 6 carteiros para distribuir, em um dia, estas correspondências, o número de residências desse bairro, que as receberam, é:

a) 300 c) 400 e) 460
b) 340 d) 420

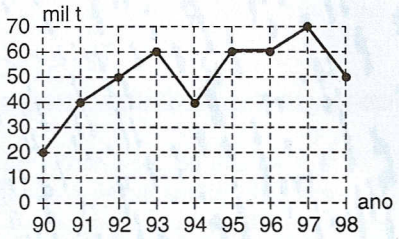
8 (UFSM-RS) Um laboratório testou a ação de uma droga em uma amostra de 720 frangos. Constatou-se que a lei de sobrevivência do lote de frangos era dada pela relação $v(t) = at^2 + b$, sendo v(t) o número de elementos vivos no tempo t (meses). Sabendo-se que o último frango morreu quando t = 12 meses após o início da experiência, a quantidade de frangos que ainda estava viva no 10º mês é:

a) 80 c) 120 e) 300
b) 100 d) 220

9 (UPF-RS) O domínio da função $f(x) = \frac{\sqrt{x + 5}}{x^2 + 3x - 18}$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 \geq x \geq 3\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \text{ e } x < 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -5 \text{ e } x \neq 3\}$
e) $\mathbb{R}^*$

10 (Vunesp-SP) O gráfico representa, em milhares de toneladas, a produção, no Estado de São Paulo, de um determinado produto agrícola entre os anos de 1990 e 1998.



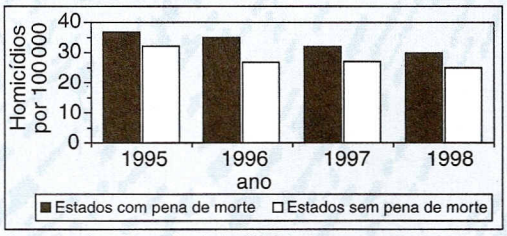
Analisando-se o gráfico, observa-se que a produção:

a) foi crescente entre 1992 e 1995.
b) teve média de 40 mil toneladas ao ano.
c) em 1993 teve acréscimo de 30% em relação ao ano anterior.
d) a partir de 1995 foi decrescente.
e) teve média de 50 mil toneladas ao ano.

11 (UF-PI) Se $f(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$, $p = 10^8$ e $q = 10^{10}$, então o valor de $\frac{f(p) - f(q)}{q - p}$ é:

a) 10^8 c) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{1}{3}$
b) 10^{10} d) $-\frac{2}{3}$

12 (Enem-MEC) O gráfico compara o número de homicídios por grupo de 100 000 habitantes entre 1995 e 1998 nos EUA, em Estados com e sem pena de morte.



Fonte: Revista *Carta Capital*, 6/12/2000.

Com base no gráfico, pode-se afirmar que:

a) a taxa de homicídios cresceu apenas nos Estados sem pena de morte.

b) nos Estados com pena de morte a taxa de homicídios é menor que nos Estados sem pena de morte.
c) no período considerado, os Estados com pena de morte apresentaram taxas maiores de homicídios.
d) entre 1996 e 1997, a taxa de homicídios permaneceu estável nos Estados com pena de morte.
e) a taxa de homicídios nos Estados com pena de morte caiu pela metade no período considerado.

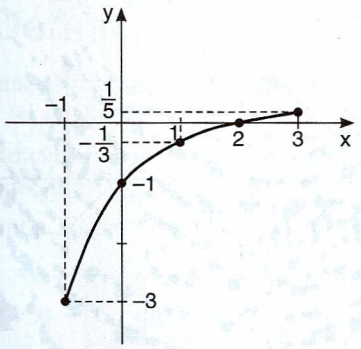
13 (UFF-RJ) Uma fábrica utiliza dois tanques para armazenar combustível.
Os níveis de combustível, H_1 e H_2, em cada tanque, são dados pelas expressões:

$H_1(t) = 150\ t^3 - 190\ t + 30$ e
$H_2(t) = 50\ t^3 + 35\ t + 30$,

sendo t o tempo em hora.
O nível de combustível de um tanque é igual ao do outro no instante inicial (t = 0) e, também, no instante:

a) t = 0,5 h
b) t = 1,0 h
c) t = 1,5 h
d) t = 2,0 h
e) t = 2,5 h

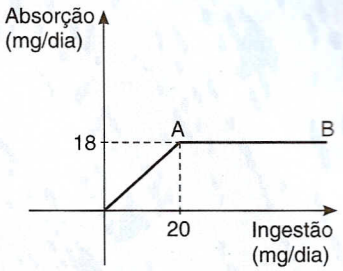
14 (Fuvest-SP) A figura a seguir representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \frac{x + a}{bx + c}$ para $-1 \leq x \leq 3$.



Pode-se concluir que o valor de b é:

a) –2
b) –1
c) 0
d) 1
e) 2

15 (UF-MG) Observe o gráfico, em que o segmento $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo das abscissas.



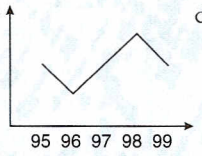
Esse gráfico representa a relação entre a ingestão de certo composto, em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.
A única afirmativa *falsa* relativa ao gráfico é:

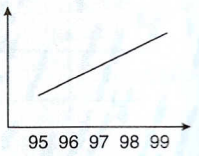
a) A razão entre a quantidade absorvida e a quantidade ingerida é constante.
b) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia é igual à absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia.
c) Para ingestões acima de 20 mg/dia, quanto maior a ingestão, menor a porcentagem absorvida do composto ingerido.
d) Para ingestões de até 20 mg/dia, a absorção é proporcional à quantidade ingerida.

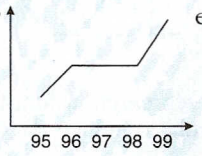
16 (Enem-MEC) O quadro a seguir apresenta a produção de algodão de uma cooperativa de agricultores entre 1995 e 1999.

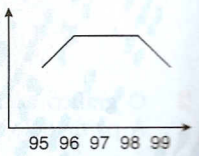
	Safra				
	1995	1996	1997	1998	1999
Produção (em mil toneladas)	30	40	50	60	80
Produtividade (em kg/hectare)	1 500	2 500	2 500	2 500	4 000

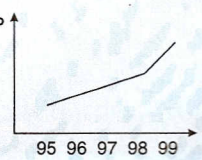
O gráfico que melhor representa a área plantada (AP) no período considerado é:

a) 

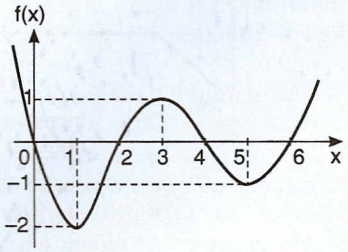
d) 

b) 

e) 

c) 

17 (Funrei-MG) Na figura abaixo, está representado o gráfico de uma função real de variável real $y = f(x)$:



Considerando os elementos desse gráfico, analise as afirmativas seguintes:

I. A função f em questão possui exatamente 3 raízes reais.

II. A função f é crescente no intervalo $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{3}\right]$.

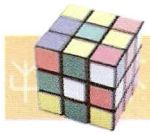
III. A função f é decrescente no intervalo $\left[\frac{10}{3}, \frac{9}{2}\right]$.

IV. $f(3) + f(1) < f(2) + f(5)$.

V. $f\left(\frac{19}{3}\right) + f\left(-\frac{19}{3}\right) = 0$.

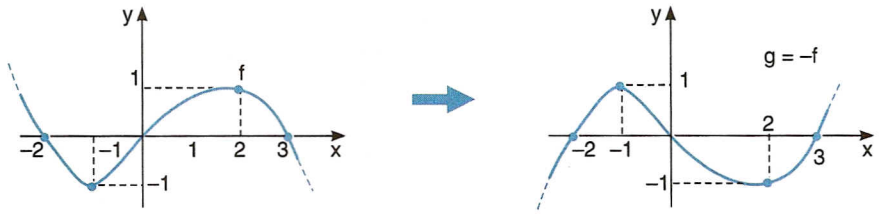
De acordo com esses dados, a alternativa correta é:

a) Todas as afirmativas são falsas.
b) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.
c) Apenas a afirmativa V é falsa.
d) Apenas a afirmativa III é verdadeira.



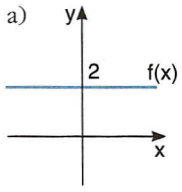
Desafios

1 Observe o gráfico da função real f. A partir dele, é possível obter o gráfico da função g, tal que $g(x) = -f(x)$. Basta notar que a imagem de um número real x obtida pela aplicação de g é *oposta* à imagem desse mesmo x obtida pela aplicação da f. Acompanhe (lembre que, se x_0 é *raiz*, então $f(x_0) = 0$):

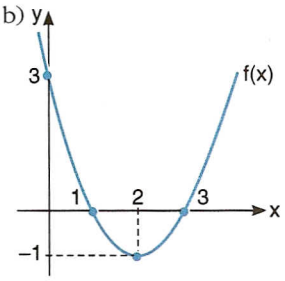


Esse mesmo raciocínio permitiria obter, sem dificuldade, os gráficos de $1 + f(x)$ (a imagem de cada elemento x ficaria aumentada de 1 unidade), $3 \cdot f(x)$, $f(x) - 2$, etc.
Agora, em cada item abaixo, faça um esboço dos gráficos de g e h, tais que $g(x) = f(x) + 2$ e $h(x) = -f(x)$, a partir do gráfico de f.

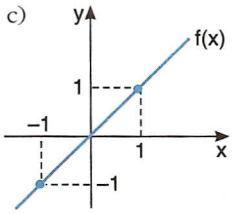
a)



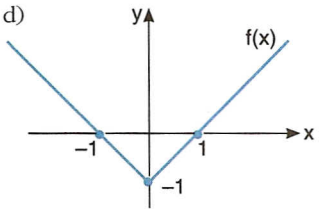
b)



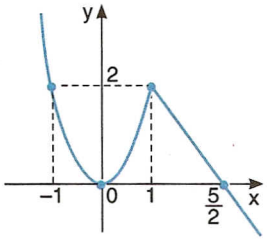
c)

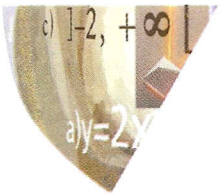


d)



2 O gráfico ao lado representa a função g, dada por $g(x) = -2f(x) + 1$. A partir dele, obtenha o gráfico de f.





3 FUNÇÃO AFIM

1 ○ Introdução

Photodisc

Uma conta telefônica apresenta apenas duas parcelas: a referente à assinatura, que custa R$ 25,00, e a referente aos pulsos, que representam o tempo de uso da linha para fazer ligações locais ao custo de R$ 0,08 cada.

Qual o valor da conta para 100 pulsos?

$$v = \text{pulsos} + \text{assinatura} = R\$\ 0{,}08 \cdot 100 + R\$\ 25{,}00 =$$
$$= R\$\ 8{,}00 + R\$\ 25{,}00 = R\$\ 33{,}00$$

Se o consumo fosse de 200 pulsos, qual seria o valor da conta?

$$v = R\$\ 0{,}08 \cdot 200 + R\$\ 25{,}00 = R\$\ 16{,}00 + R\$\ 25{,}00 = R\$\ 41{,}00$$

Podemos notar que, para cada número x de pulsos, há um certo valor $v(x)$ da conta telefônica. O valor de $v(x)$ é uma função de x:

$$v(x) = 0{,}08 \cdot x + 25,$$

que é um exemplo de *função polinomial do 1º grau* ou *função afim*.

2 ○ Definição

Chama-se *função polinomial do 1º grau*, ou *função afim*, a qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax + b$, em que a e b são números reais dados e $a \neq 0$.

Na função $f(x) = ax + b$, o número a é chamado de coeficiente de x e o número b é chamado termo constante.

Vejamos alguns exemplos de funções polinomiais do 1º grau:

1. $f(x) = 5x + 7$, em que $a = 5$ e $b = 7$
2. $f(x) = -3x - 11$, em que $a = -3$ e $b = -11$
3. $f(x) = \frac{x}{4} - \frac{3}{5}$, em que $a = \frac{1}{4}$ e $b = -\frac{3}{5}$
4. $f(x) = 2x$, em que $a = 2$ e $b = 0$

3 ○ Gráfico

O gráfico de uma função polinomial do 1º grau, $y = ax + b$, com $a \neq 0$, é uma reta oblíqua aos eixos Ox e Oy.

Exemplo 1

Vamos construir o gráfico da função $y = 2x - 3$.

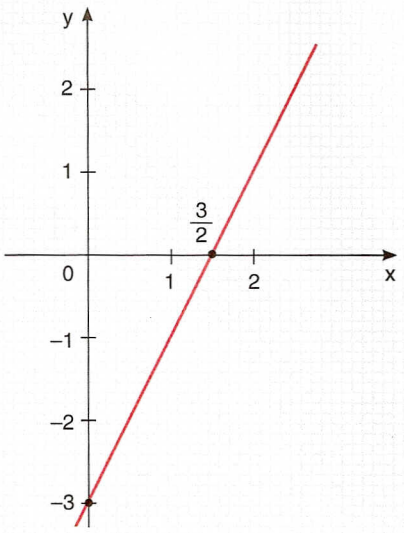
Como o gráfico é uma reta, basta obter dois de seus pontos e ligá-los com o auxílio de uma régua.

Para $x = 0$, temos $y = 2 \cdot 0 - 3 = -3$; portanto, um ponto é $(0, -3)$.

Para $y = 0$, temos $0 = 2x - 3$; portanto, $x = \frac{3}{2}$ e outro ponto é $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

Marcamos esses dois pontos no plano cartesiano e ligamos os dois com uma reta.

x	y
0	–3
$\frac{3}{2}$	0



Exemplo 2

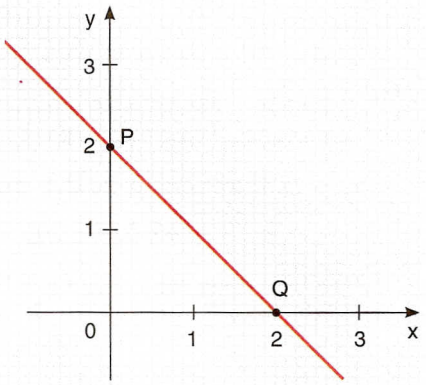
Vamos construir o gráfico da função $y = -x + 2$.

Para $x = 0$, temos $y = -0 + 2 = 2$; portanto, um ponto é $P(0, 2)$.

Para $y = 0$, temos $0 = -x + 2$; portanto, $x = 2$ e outro ponto é $Q(2, 0)$.

x	y
0	2
2	0

A lei $y = -x + 2$ também é chamada *equação da reta* $\overleftrightarrow{PQ}$.



Exemplo 3

Vejamos como obter a equação da reta que passa pelos pontos $A(-2, 1)$ e $B(3, 4)$.

A reta $\overleftrightarrow{AB}$ tem equação $y = ax + b$. Precisamos determinar a e b.

Como $(-2, 1)$ pertence à reta, temos:

$$1 = a(-2) + b, \text{ ou seja, } -2a + b = 1$$

Como $(3, 4)$ pertence à reta, temos:

$$4 = a(3) + b, \text{ ou seja, } 3a + b = 4$$

Assim, a e b satisfazem o sistema

$$\begin{cases} -2a + b = 1 \\ 3a + b = 4 \end{cases}$$

cuja solução é $a = \frac{3}{5}$ e $b = \frac{11}{5}$.

Portanto, a equação procurada é:

$$y = \frac{3}{5} \cdot x + \frac{11}{5}$$

Exercícios

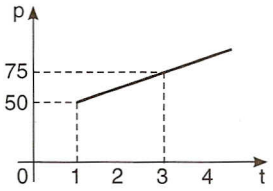
1 Construa os gráficos das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = x + 2$
b) $y = -x + 1$
c) $y = 2x - 1$
d) $y = x$
e) $y = -2x$

2 O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 560,00. Para aumentar sua receita, ele faz plantões noturnos em uma boate, onde recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

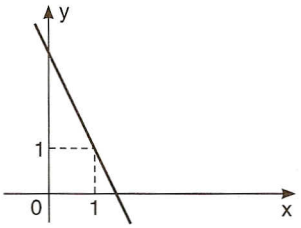
a) Se em um mês o segurança fizer 3 plantões, que salário receberá?
b) Qual é o salário final y quando ele realiza x plantões?
c) Represente graficamente a função obtida no item anterior, lembrando que seu domínio é o conjunto dos números *naturais*.

3 (UC-GO) Um pecuarista mede o desenvolvimento de um bezerro em quilogramas, todos os meses. Ligando os pontos por ele observados num gráfico obtém-se a figura ao lado. Mantida essa relação entre o tempo (t), medido em meses, e o "peso" p, medido em kg, qual será o "peso" do bezerro no 6º mês?



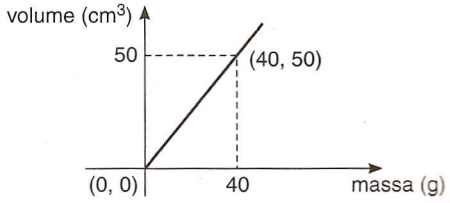
4 A função f, definida por $f(x) = -2x + m$, está representada ao lado.

Qual é o valor de $\dfrac{f(-1) + f(0)}{f(2)}$?

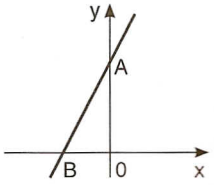


5 (Vunesp-SP) Apresentamos ao lado o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0 °C.
Baseado nos dados do gráfico, determine:

a) a lei da função apresentada no gráfico;
b) qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool.



6 (PUC-MG)
A reta representada no gráfico tem equação $5x - 2y + 10 = 0$ e intercepta os eixos cartesianos nos pontos A e B. Qual é a medida da área do triângulo OBA, em unidades de área?



7 Leia o texto abaixo e, em seguida, responda às questões:

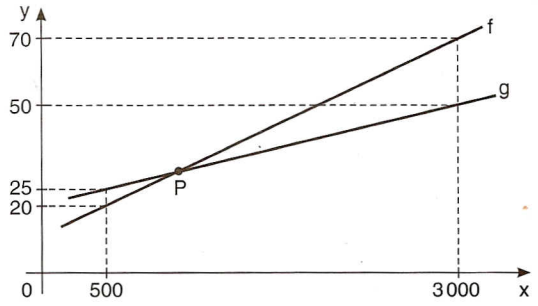
> Na última terça-feira, São Paulo voltou a mergulhar em seu pesadelo recorrente. A greve de metroviários, uma insistente chuva fina e a suspensão pelo segundo dia consecutivo do rodízio de veículos fizeram com que o paulistano ficasse parado em um congestionamento que, às 19 horas, chegou a 215 quilômetros de extensão. É o segundo maior índice de lentidão registrado pela Companhia de Engenharia de Tráfego (CET).
>
> Ano após ano, a situação se agrava. A CET estima que a monstruosa frota registrada na capital — 5,2 milhões de veículos, ou um para cada dois moradores — cresça na proporção de 500 carros por dia.
>
> (*Veja São Paulo*, 4/7/2001.)

a) De acordo com a notícia, como se expressa a frota de veículos v que haverá na cidade de São Paulo daqui a t anos (contados a partir da data da notícia)? Considere que um mês tem 30 dias.
b) Mantido tal crescimento, daqui a quantos meses a frota alcançará 6,1 milhões de veículos?

8 Há muitos anos, uma professora do ensino fundamental adotava o seguinte critério como nota de participação no bimestre: todo aluno começava com 10; quando ele deixava de fazer uma tarefa ou apresentava um comportamento inadequado em aula, recebia um "negativo", perdendo 0,4 na nota.

a) Qual seria a nota de participação de um aluno que recebesse 7 "negativos" no bimestre?
b) Em geral, como se expressaria a nota n de participação de um aluno que recebesse x "negativos"?
c) Se a prova tivesse peso 2 e a participação tivesse peso 1, quantos "negativos", no máximo, poderia receber um aluno que tirasse 5,0 na prova e necessitasse de média 6,0?

Para responder às questões de números 9 e 10 considere os dados que seguem.
Na figura abaixo têm-se os gráficos de duas funções do 1º grau, f e g, que se interceptam no ponto P.



9 (Puccamp-SP, adaptado) Quais são as coordenadas do ponto P?

10 (Puccamp-SP, adaptado) A capacidade térmica de um corpo (C) é definida como a razão entre a variação da quantidade de calor recebida pelo corpo e a variação da temperatura no intervalo considerado. Se os valores de f e g representam as temperaturas de dois corpos F e G, respectivamente, enquanto x representa a quantidade de calor por eles recebida, qual é a razão $\frac{C_F}{C_G}$ entre as capacidades térmicas de F e G?

4 Coeficientes da função afim

Já vimos que o gráfico da função afim $y = ax + b$ é uma reta.

O *coeficiente de x*, a, é chamado *coeficiente angular* da reta e, como veremos adiante, a está ligado à inclinação da reta em relação ao eixo Ox.

O *termo constante*, b, é chamado *coeficiente linear* da reta. Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0 + b = b$. Assim, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo Oy.

Exercícios

11 Identifique o coeficiente angular (a) e o coeficiente linear (b) de cada uma das seguintes funções do 1º grau:

a) $y = 2x - 5$
b) $y = \frac{-x + 1}{2}$
c) $y = \sqrt{2}\,x$
d) $y = (x - 1)^2 - x^2$

12 (FGV-SP) A receita mensal de vendas de uma empresa (y) relaciona-se com os gastos mensais com propaganda (x) por meio de uma função do 1º grau. Quando a empresa gasta R$ 10 000,00 por mês de propaganda, sua receita naquele mês é de R$ 80 000,00; se o gasto mensal com propaganda for o dobro daquele, a receita mensal cresce 50% em relação àquela.

a) Qual é a receita mensal se o gasto mensal com propaganda for de R$ 30 000,00?
b) Obtenha a expressão de y em função de x.

5 Zero e equação do 1º grau

Chama-se *zero* ou *raiz* da função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, o número real x tal que $f(x) = 0$.

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

Então, a *raiz* da função $f(x) = ax + b$ é a solução da equação do 1º grau $ax + b = 0$, ou seja, $x = -\frac{b}{a}$.

Vejamos alguns exemplos.

1. Obtenção do *zero* da função $f(x) = 3x + 7$.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x + 7 = 0 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$$

2. Cálculo da *raiz* da função $g(x) = -2x + 11$.

$$g(x) = 0 \Rightarrow -2x + 11 = 0 \Rightarrow x = \frac{11}{2}$$

3. Cálculo da abscissa do ponto em que o gráfico da função $h(x) = -3x - 5$ corta o eixo dos x. Nesse ponto devemos ter $h(x) = 0$ e daí:

$$-3x - 5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$$

Exercícios

13 Resolva as seguintes equações de 1º grau:

a) $13(2x - 3) - 5(2 - x) = 5(-3 + 6x)$

b) $3(x + 2) = 2(x - 7) + x + 20$

c) $\frac{x}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3x}{5} - \frac{2}{5}$

d) $\frac{2x - 3}{5} - \frac{11 - x}{3} = \frac{29}{30}$

e) $1 + \frac{5x - 36}{4} + \frac{2 - x}{2} = 2 + \frac{x - 12}{2}$

f) $-x + 4(2 - x) = -2x - (10 + 3x)$

14 (Unicap-PE) Elon, aluno adepto das brincadeiras com números, foi indagado sobre a idade de sua irmã. Eis a sua resposta: "Há oito anos, a idade dela era um quarto da idade que terá daqui a um ano". Qual a idade, em anos, da irmã de Elon?

15 (UF-PB) Uma herança foi dividida entre a viúva, a filha, o filho e o cozinheiro. A filha e o filho ficaram com a metade, distribuída na proporção de 4 para 3, respectivamente. A viúva ganhou o dobro do que coube ao filho, e o cozinheiro, R$ 500,00. Calcule o valor da herança.

16 Determine a raiz de cada uma das seguintes funções:

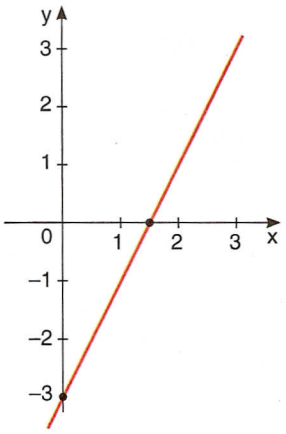
a) $f(x) = 2x - 1$ b) $f(x) = -3x$ c) $f(x) = -x + 3$ d) $f(x) = (x - 1)^2 - (x + 2)^2$

17 Qual é a lei que define uma função afim de coeficiente angular igual a -2 e raiz igual a 3?

18 (UE-PA) Um executivo muito previdente distribui seus vencimentos mensais da seguinte maneira: $\frac{1}{8}$ para plano de saúde; $\frac{1}{4}$ para poupança; $\frac{1}{6}$ para alimentação e moradia e os R$ 6 600,00 restantes para lazer. Quanto o executivo poupa mensalmente?

6 ○ Crescimento e decrescimento

Consideremos a função do 1º grau $y = 2x - 3$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:



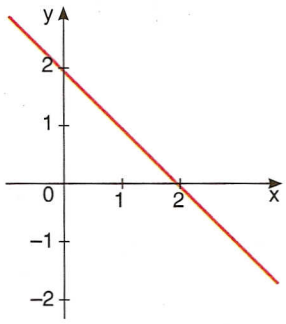
x aumenta

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−9	−7	−5	−3	−1	1	3	5

y aumenta

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y também aumentam. Dizemos, então, que a função $y = 2x - 3$ é *crescente*. Observe novamente seu gráfico.

Consideremos a função $y = -x + 2$. Vamos atribuir valores cada vez maiores a x e observar o que ocorre com y:



x aumenta

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	5	4	3	2	1	0	−1	−2

y diminui

Notemos que, quando aumentamos o valor de x, os correspondentes valores de y diminuem. Dizemos, então, que a função $y = -x + 2$ é *decrescente*. Observe novamente seu gráfico.

Regra geral:

a função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é crescente quando o coeficiente de x é positivo ($a > 0$);

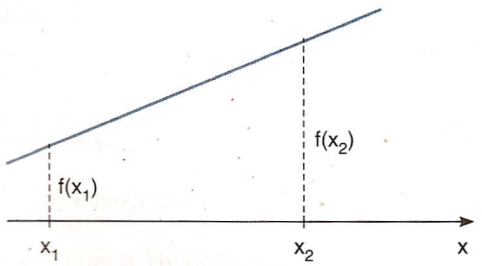
a função do 1º grau $f(x) = ax + b$ é decrescente quando o coeficiente de x é negativo ($a < 0$).

Justificativa:

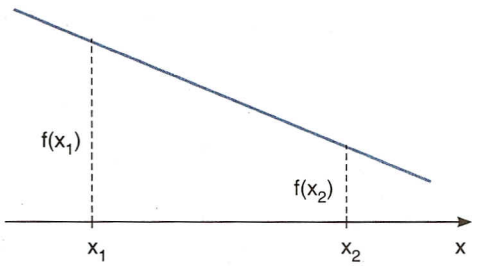
- para $a > 0$: se $x_1 < x_2$, então $ax_1 < ax_2$. Daí, $ax_1 + b < ax_2 + b$, de onde vem $f(x_1) < f(x_2)$.
- para $a < 0$: se $x_1 < x_2$, então $ax_1 > ax_2$. Daí, $ax_1 + b > ax_2 + b$, de onde vem $f(x_1) > f(x_2)$.

Resumo

Se $f(x) = ax + b$, temos:



f é crescente quando $a > 0$



f é decrescente quando $a < 0$

Exemplo 4

Vamos discutir, em função do parâmetro m, a variação (decrescente, constante, crescente) da função $y = (m - 1)x + 5$.

Quando, em uma expressão algébrica, existe uma variável principal e outras variáveis secundárias, estas são chamadas *parâmetros*. Na expressão $(m - 1)x + 5$, a variável principal é x, e m é um parâmetro.

O coeficiente de x nessa equação é $m - 1$. Assim, temos:

- a função é decrescente se $m - 1 < 0$, ou seja, se $m < 1$;
- a função é constante se $m - 1 = 0$, ou seja, se $m = 1$;
- a função é crescente se $m - 1 > 0$, ou seja, se $m > 1$.

Exercícios

19 Avalie se cada uma das funções abaixo é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$:

a) $y = 3x + 2$
b) $y = x - 10$
c) $y = -2x - 3$
d) $y = 3 - x$
e) $y = \sqrt{3}\,x$
f) $y = -1 - \sqrt{2}\,x$

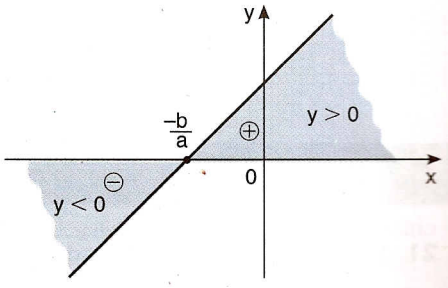
20 Discuta, em função do parâmetro m, a "variação" (crescente, decrescente ou constante) de cada uma das funções abaixo:

a) $y = (m + 2)x - 3$
b) $y = (4 - m)x + 2$

7 Sinal

Estudar o sinal de uma função qualquer $y = f(x)$ é determinar os valores de x para os quais y é positivo, os valores de x para os quais y é zero e os valores de x para os quais y é negativo.

Consideremos uma função afim $y = f(x) = ax + b$ e estudemos seu sinal. Já vimos que essa função se anula para $x = -\frac{b}{a}$ (raiz). Há dois casos possíveis:



1º) $a > 0$ (a função é crescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

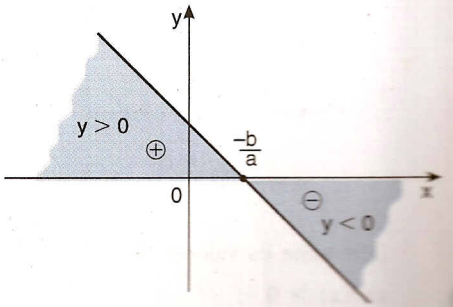
Conclusão: y é positivo para valores de x maiores que a raiz; y é negativo para valores de x menores que a raiz.

2º) $a < 0$ (a função é decrescente)

$$y > 0 \Rightarrow ax + b > 0 \Rightarrow x < -\frac{b}{a}$$

$$y < 0 \Rightarrow ax + b < 0 \Rightarrow x > -\frac{b}{a}$$

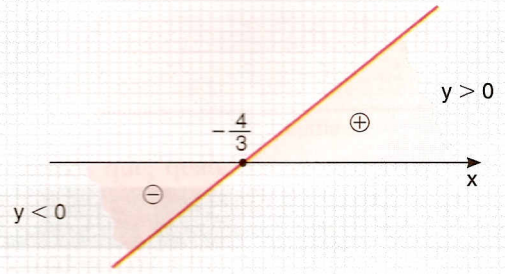
Conclusão: y é positivo para valores de x menores que a raiz; y é negativo para valores de x maiores que a raiz.



Exemplo 5

Vamos estudar o sinal da função $y = 3x + 4$.

Essa função polinomial do 1º grau apresenta $a = 3 > 0$ e raiz $x = -\frac{4}{3}$. Seu gráfico é crescente e corta o eixo Ox no ponto $-\frac{4}{3}$.

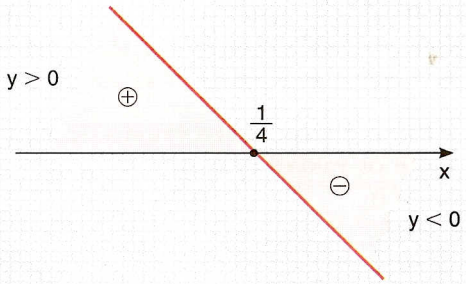


Sinal
$y > 0 \Rightarrow x > -\frac{4}{3}$
$y < 0 \Rightarrow x < -\frac{4}{3}$

Exemplo 6

Vamos estudar o sinal da função $y = -4x + 1$.

Essa função do 1º grau apresenta $a = -4 < 0$ e raiz $x = \frac{1}{4}$. Seu gráfico é decrescente e corta o eixo Ox no ponto $\frac{1}{4}$.



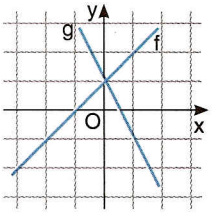
Sinal
$y > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{4}$
$y < 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$

Exercícios

21 Estude o sinal de cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 3$ b) $y = -3x + 2$ c) $y = 5x$ d) $y = 3 - \frac{x}{2}$

22 Ao lado são dados os gráficos de duas funções f e g, definidas em $\mathbb{R}$.



Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) > 0$ b) $g(x) < 0$ c) $f(x) \cdot g(x) = 0$

8 ○ Inequações

Vamos resolver inequações do 1º grau e algumas inequações nas quais pode ser aplicado o estudo de sinal da função afim.

Exemplo 7

Vejamos como resolver a inequação $3(x - 1) + 4 \leqslant x + 5$.

▶ *1º passo:* desenvolvemos os parênteses:

$$3x \underbrace{- 3 + 4}_{+1} \leqslant x + 5$$

▶ *2º passo:* passamos todos os termos que contêm a incógnita x para o 1º membro:

$$3x - x + 1 \leqslant 5$$

▶ *3º passo:* passamos todas as constantes para o 2º membro:

$$3x - x \leqslant 5 - 1$$
$$2x \leqslant 4$$

▶ *4º passo:* dividimos os dois membros pelo coeficiente de x:

$$x \leqslant \frac{4}{2}$$
$$x \leqslant 2$$
$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 2\}$$

Exemplo 8

Vamos resolver a inequação $2 \leqslant 3x + 1 < x + 7$.
De fato são duas inequações simultâneas:

$$2 \leqslant 3x + 1 \quad \text{(I)} \quad \text{e} \quad 3x + 1 < x + 7 \quad \text{(II)}$$

Vamos resolver (I):

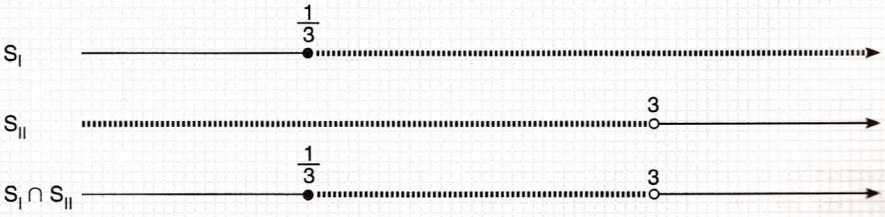
$$2 \leqslant 3x + 1 \Rightarrow -3x \leqslant 1 - 2 \Rightarrow -3x \leqslant -1 \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{3} \quad (S_I)$$

(Observemos que, ao dividir ambos os membros por um número negativo, devemos inverter o sentido da desigualdade.)

Vamos resolver (II):

$$3x + 1 < x + 7 \Rightarrow 3x - x < 7 - 1 \Rightarrow 2x < 6 \Rightarrow x < 3 \ (S_{II})$$

Procuremos agora a interseção das duas soluções:

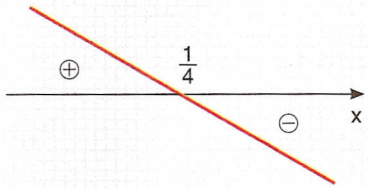


$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{3} \leqslant x < 3\right\}$$

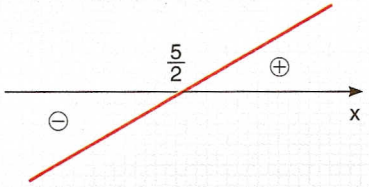
Exemplo 9

Resolvamos a inequação-produto $(1 - 4x)(2x - 5) \leq 0$.

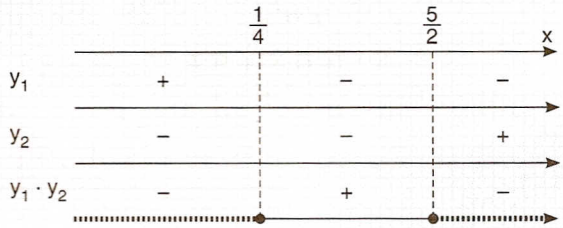
Façamos $y_1 = 1 - 4x$ e estudemos o sinal de y_1. Temos $a = -4 < 0$ e raiz $x = \frac{1}{4}$. Então:



Façamos $y_2 = 2x - 5$ e estudemos o sinal de y_2. Temos $a = 2 > 0$ e raiz $x = \frac{5}{2}$. Então:



Estudemos o sinal do produto $y_1 \cdot y_2$:



A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $y_1 \cdot y_2 \leq 0$?".

Resposta: $x \leq \frac{1}{4}$ ou $x \geq \frac{5}{2}$

Exercícios

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $3x - 4 \leq x + 5$

b) $19 - 17x < -4 + x$

c) $2(x + 3) < -2(3x + 1)$

d) $x - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2} + 2x$

e) $\frac{x}{3} + \frac{x - 1}{2} + x \leq \frac{x - 2}{5} - \frac{x - 3}{4}$

24 Uma companhia de telefones celulares oferece a seus clientes duas opções: na primeira opção, cobra R$ 38,00 pela assinatura mensal e mais R$ 0,60 por minuto de conversação; na segunda, não há taxa de assinatura, mas o minuto de conversação custa R$ 1,10.

a) Qual é a opção mais vantajosa para 1 hora de conversação mensal?

b) A partir de quanto tempo deve-se optar pela primeira opção?

25 **ALINE** — Adão Iturrusgarai

(*Folha de S. Paulo*, 17/11/2001.)

Suponha que Aline tenha se comprometido a fazer depósitos mensais de R$ 40,00 para cobrir o "rombo" na sua conta corrente e, depois, criar uma poupança. O gerente do banco decidiu não mais cobrar juros sobre o saldo devedor a partir dessa data. (Despreze os centavos.)

a) Após n meses, qual será o saldo da conta de Aline?
b) Em quanto tempo seu saldo será de R$ 188,00?
c) Quantos meses serão necessários para Aline "sair do vermelho"?

26 (UF-SE) Na fabricação de um lote de peças de certo produto, o custo total é igual à soma de um valor fixo de R$ 400,00 com o custo de produção unitário de R$ 0,50. Se o preço unitário de venda dessas peças for de R$ 0,85, qual é o número mínimo de peças que devem ser fabricadas e vendidas para que se comece a ter lucro?

27 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$
b) $-3 < -x < 1$
c) $-4 < 4 - 2x \leq 3$
d) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

28 Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas de inequações:

a) $\begin{cases} 3 - 2x \leq 1 \\ 3x - 1 \leq 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 2 \geq 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

29 Uma churrascaria cobra, no almoço, R$ 12,00 por pessoa. Após as 15 h, esse valor cai para R$ 9,00. Estima-se que o custo *total* de um almoço seja de R$ 7,00 por pessoa. Em certo dia, 100 clientes almoçaram na churrascaria, sendo que x deles compareceram até as 15 h.

a) Determine a expressão que define o lucro L obtido nesse dia em função de x.
b) Determine o intervalo de variação de x a fim de que $300 < L < 400$.

30 (FGV-SP) Uma empresa B tem hoje um saldo devedor de R$ 300 000,00 e uma outra empresa C tem hoje um saldo devedor de R$ 250 000,00. O saldo devedor de B diminui R$ 6 000,00 por mês e o de C diminui R$ 2 500,00 por mês. A partir de quantos meses (contados de hoje) o saldo devedor de B ficará menor que o de C?

31 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações-produto:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$
b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$
c) $(6x - 1)(2x + 7) \leq 0$

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

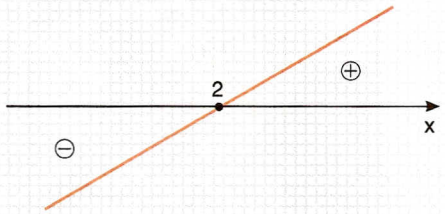
a) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$
b) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$
c) $(1 - x) \cdot (x - 1) > 0$
d) $(2x - 1) \cdot (1 - 2x) < 0$

33 Quantos e quais números *inteiros* satisfazem a desigualdade $(2x - 1) \cdot (-x + 3) > 0$?

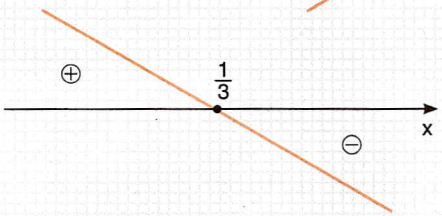
Exemplo 10

Vamos resolver a inequação-quociente $\frac{4x - 8}{2 - 6x} \geqslant 0$.

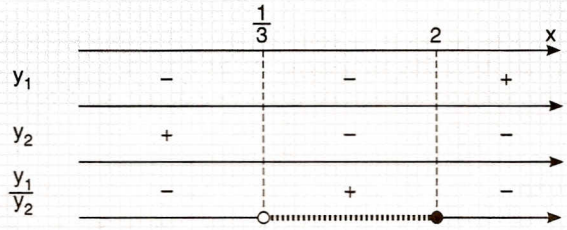
- *Estudo do sinal de* $y_1 = 4x - 8$
  $a = 4 > 0$ e raiz $x = 2$



- *Estudo do sinal de* $y_2 = 2 - 6x$
  $a = -6 < 0$ e raiz $x = \frac{1}{3}$



- *Estudo do sinal do quociente* $\frac{y_1}{y_2}$



A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $\frac{y_1}{y_2} \geqslant 0$?".

Resposta: $\frac{1}{3} < x \leqslant 2$. (Notemos que $\frac{y_1}{y_2} = 0$ somente se $y_1 = 0$ e $y_2 \neq 0$. Isso ocorre quando $x = 2$, mas *não* ocorre quando $x = \frac{1}{3}$.)

Exemplo 11

Vamos resolver a inequação $\frac{x + 2}{1 - x} \leqslant 2$.

Se, simplesmente, multiplicarmos ambos os membros por $1 - x$ (que pode ser positivo ou negativo, dependendo do valor de x), não saberemos se o sinal da desigualdade deverá ser mantido ou invertido. Por isso, utilizaremos o seguinte procedimento:

$$\frac{x + 2}{1 - x} \leqslant 2 \Rightarrow \frac{x + 2}{1 - x} - 2 \leqslant 0 \Rightarrow \frac{(x + 2) - 2(1 - x)}{1 - x} \leqslant 0 \Rightarrow \frac{3x}{1 - x} \leqslant 0$$

A partir desse ponto, utilizamos a mesma técnica do exemplo 10.

Exemplo 12

Outra aplicação do estudo do sinal seria a obtenção do domínio de uma função.

Vejamos como obter o domínio da função definida por $f(x) = \sqrt{\frac{x + 1}{1 - 2x}}$.

Devemos impor que o radicando seja não negativo, isto é:

$$\frac{x + 1}{1 - 2x} \geqslant 0$$

E agora aplicamos a mesma técnica vista no exemplo 10.

Exercícios

34 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{2x + 1}{x + 2} > 0$

b) $\frac{3x - 2}{3 - 2x} < 0$

c) $\frac{3 - 4x}{5x + 1} \geqslant 0$

d) $\frac{(1 - 2x)(3 + 4x)}{(4 - x)} > 0$

35 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{3x - 2}{1 - x} \leqslant -3$

b) $\frac{1}{x - 1} < \frac{2}{x - 2}$

c) $\frac{1}{x} \leqslant 2$

36 (UF-CE) Qual é o conjunto solução da inequação $\frac{1}{2x + 1} < \frac{1}{1 - x}$, tendo como conjunto universo o conjunto dos números reais?

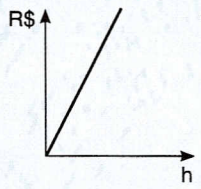
37 Encontre os valores de x para os quais está definida a função $f(x) = \sqrt{(x - 1)(-x + 4)}$.

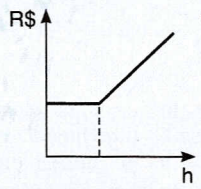
38 Qual é o domínio da função f definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 4x}}$?

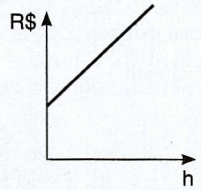
39 (Fuvest-SP) Qual é o conjunto solução da inequação $\frac{x}{x + 1} > x$?

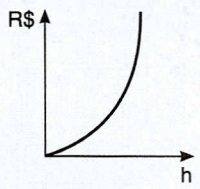
Testes de vestibulares

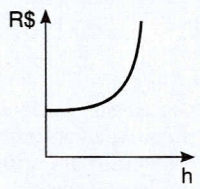
1 (UF-PA) Uma loja no centro de Belém aluga microcomputadores para usuários que desejam navegar pela Internet. Para utilizar esse serviço, o usuário paga uma taxa de R$ 2,00 acrescida de R$ 3,00 por hora de utilização da máquina. O gráfico que melhor representa o preço desse serviço é:

a) 

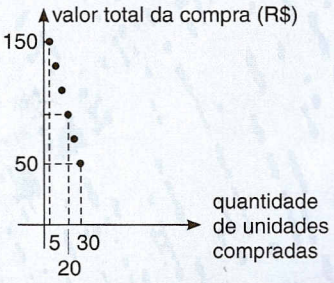
b) 

c) 

d) 

e) 

2 (UE-RJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico abaixo, por 6 pontos de uma mesma reta.



Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, pagará por unidade, em reais, o equivalente a:

a) 4,50 b) 5,00 c) 5,50 d) 6,00

3 (U. F. Uberlândia-MG) O conjunto dos números reais que satisfazem a inequação $\frac{x - 2}{5} + \frac{x + 1}{3} \geqslant x$ é:

a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{7}\right\}$

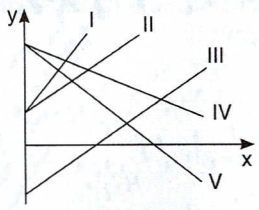
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{15}\right\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -\frac{1}{7}\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{1}{15}\right\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$

4 (U. Gama Filho-RJ)

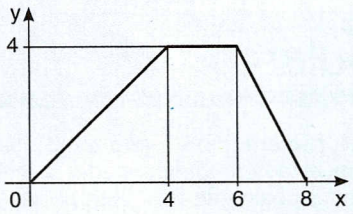


g(x) = –x + 60
h(x) = 2x – 30
u(x) = 2x + 20
w(x) = 4x + 20

No sistema de eixos coordenados, as retas I, II, III, IV e V representam os gráficos de diferentes funções *g*, *h*, *u* e *w*, cujas equações são dadas no quadro.
Fazendo corresponder cada função ao respectivo gráfico, a opção correta é:

a) I — w; II — u; III — h; IV — g
b) I — w; II — h; III — u; V — g
c) I — u; II — h; III — w; IV — g
d) I — u; II — h; III — w; V — g
e) I — u; II — w; III — h; V — g

5 (UFF-RJ) O gráfico da função *f* está representado na figura:



Sobre a função *f* é *falso* afirmar que:

a) f(1) + f(2) = f(3)
b) f(2) = f(7)
c) f(3) = 3f(1)
d) f(4) – f(3) = f(1)
e) f(2) + f(3) = f(5)

6 (UF-CE) Existem *n* números inteiros que são soluções, simultaneamente, das inequações $3x - 4 \leq 5$ e $6 - 5x < 17$.
Assinale a opção que apresenta o valor correto de *n*:

a) 7
b) 6
c) 5
d) 4
e) 3

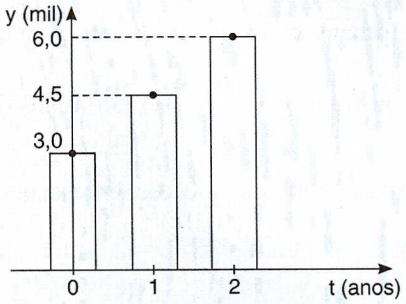
7 (Vunesp-SP) Duas pequenas fábricas de calçados, *A* e *B*, têm fabricado, respectivamente, 3000 e 1100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica *A* aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica *B* aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica *B* superará a produção da *A* a partir de:

a) março.
b) maio.
c) julho.
d) setembro.
e) novembro.

8 (PUC-RJ) Seja *k* um número positivo. Então o conjunto dos números *x* tais que $\frac{x - k}{k} \geq 1$ e $\frac{x + k^2}{k} < k + 2$ é:

a) vazio.
b) formado por um elemento único.
c) $[4, +\infty)$.
d) $(-\infty, 4)$.
e) $[-4, 2)$.

9 (PUC-MG) O gráfico abaixo registra o reflorestamento de uma área em t = 0 (ano de 1996), t = 1 (ano de 1997), t = 2 (ano de 1998), e assim por diante. Admitindo-se constante a taxa de reflorestamento anual, o ano em que o número de árvores plantadas atinge 46,5 mil é:



a) 2021
b) 2022
c) 2023
d) 2024
e) 2025

10 (Ucsal-BA) No universo $U = \mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação

$$2(x + 1) - kx \geq 3, \text{ com } k \in \mathbb{R},$$

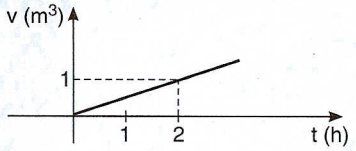
depende do valor da constante *k*. É verdade que o conjunto solução será:

a) $\varnothing$, para todo $k \in \mathbb{R}$
b) $\left[\frac{1}{2 - k}, +\infty\right[$, se $k > 2$
c) $\left[\frac{1}{2 - k}, +\infty\right[$, se $k < 3$
d) $\left]-\infty, \frac{1}{2 - k}\right]$, se $k > 2$
e) $\left]-\infty, \frac{1}{2 - k}\right]$, se $k < 0$

11 (Fatec-SP) O dono de uma rede hoteleira verificou que em certa região tem havido um decréscimo no número de hóspedes em seus pacotes promocionais, e esse decréscimo tem sido linear em relação ao tempo. Em 1982, a média foi de 600 pessoas por semana, enquanto em 1990 a média semanal foi de 432.
Dessa forma, o número médio de hóspedes por semana,

a) em 1995, foi 322.
b) em 1994, foi 345.
c) em 1993, foi 370.
d) em 1992, foi 392.
e) em 1991, foi 411.

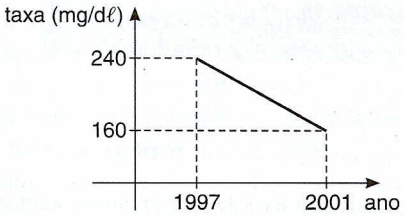
12 (Uneb-BA) Uma torneira enche um reservatório de água com capacidade de 1500 litros.



Estando aberta a torneira, o volume da água do reservatório aumenta em função do tempo, de acordo com o gráfico acima.
O tempo necessário para que o reservatório fique completamente cheio é igual a:

a) 2h30min
b) 3h
c) 3h30min
d) 4h
e) 4h30min

13 (FEHIAE-SP) O gráfico seguinte informa a taxa de colesterol (em mg/dℓ de sangue) de um indivíduo que se submeteu a sucessivos exames de controle de 1997 a 2001:



Supondo que o decréscimo da taxa de colesterol tenha sido linear nesse período, é correto afirmar que, em 2000, o exame apontou uma taxa (em mg/dℓ) de:

a) 168
b) 175
c) 180
d) 185
e) 190

14 (ESPM-SP) Suponha que o faturamento F, em reais, obtido na venda de n artigos seja dado por $F = 2{,}5n$ e que o custo C, em reais, da produção dos mesmos n artigos seja $C = 0{,}7n + 360$. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de artigos que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo:

a) [194; 197]
b) [198; 203]
c) [207; 217]
d) [220; 224]
e) [230; 233]

15 (Cesgranrio-RJ) O domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{2 + x}{5 - x}}$ é o intervalo:

a) $]-5, -2]$
b) $]-2, 5]$
c) $[-2, 5[$
d) $[-2, +\infty[$
e) $]5, +\infty[$

16 (U. F. Juiz de Fora-MG) Um aluno resolveu a inequação $\frac{2x}{x + 1} \geq 1$ do seguinte modo:

$\frac{2x}{x + 1} \geq 1 \Rightarrow 2x \geq x + 1 \Rightarrow x \geq 1$

Analisando esse desenvolvimento pode-se afirmar que a solução apresentada está:

a) correta.
b) errada, pois a correta é $x < -1$.
c) errada, pois a inequação não admite solução.
d) errada, pois foi admitido que $x + 1 > 0$.
e) errada, pois não foi trocado o sentido da desigualdade.

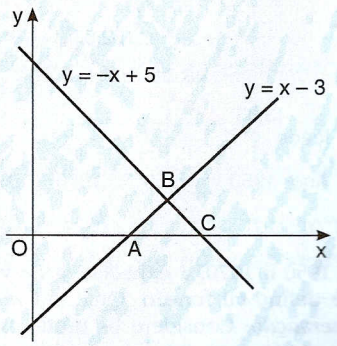
17 (Unicap-PE) Assinale V ou F:
Mestre Florindo, raizeiro famoso, vende suas garrafadas medicinais por R$ 5,00, na feira de Caruaru.

a) Se ele vende q unidades, então ele "apura" $R(q) = 5q$, que é a sua função receita.
b) Se ele tem um custo em torno de 40% de sua receita, o seu custo pode ser estimado pela equação $c(q) = 2q$.
c) Se, além disso, o mestre gastou R$ 900,00 em materiais para confecção do seu famoso produto, ele deverá vender 300 garrafadas para recuperar o seu custo total.
d) O lucro do mestre é dado pela função $L(q) = 5q - 900$.
e) Para ter um lucro de R$ 900,00 ele deverá vender 600 garrafadas.

18 (UFF-RJ) As empresas Alfa e Beta alugam televisores do mesmo tipo. A empresa Alfa cobra R$ 35,00 fixos pelos primeiros 30 dias de uso e R$ 1,00 por dia extra. A empresa Beta cobra R$ 15,00 pelos primeiros 20 dias de uso e R$ 1,50 por dia extra. Após n dias o valor cobrado pela empresa Beta passa a ser maior do que o cobrado pela empresa Alfa. O valor de n é:

a) 25
b) 35
c) 40
d) 45
e) 50

19 (U. F. Viçosa-MG) Considere a figura abaixo:

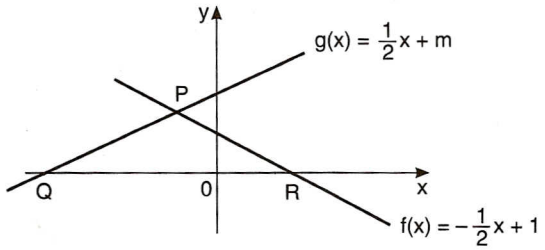


Pode-se afirmar que a área do triângulo ABC é:

a) 1
b) $\frac{1}{2}$
c) 2
d) $2\sqrt{2}$
e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Desafios

1 No gráfico seguinte estão representadas duas funções afins f e g.



Se P é o ponto de interseção das retas e a área do triângulo PQR é 4,5 unidades de área, qual é o valor de m?

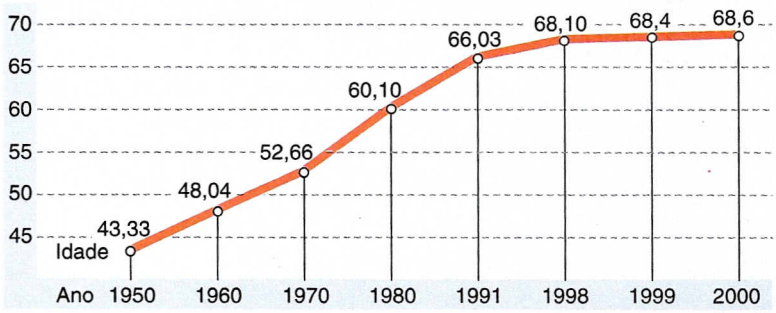
2 Ao chegar a um aeroporto, um turista informou-se sobre locação de automóveis e organizou as informações na seguinte tabela:

Opções	Diária	Preço por quilômetro rodado
Locadora 1	50,00	0,20
Locadora 2	30,00	0,40
Locadora 3	65,00	km livre

a) Qual é a lei que define o preço (y) da locação em função do número de quilômetros rodados em cada uma das situações apresentadas?
b) Represente, no mesmo plano cartesiano, os gráficos dessas funções.
c) A partir de quantos quilômetros deve o cliente preferir L_1 a L_2? Confirme tal resposta no gráfico.
d) A partir de quantos quilômetros deve-se optar por L_3?

3 Observe o gráfico e leia o texto para responder às questões abaixo:

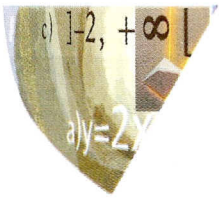
Evolução da expectativa de vida no país



A expectativa de vida ao nascer do brasileiro aumentou 2,6 anos na década de 90. Em 1991, um recém-nascido tinha expectativa de viver 66 anos. Em 2000, essa idade aumentou para 68,6 anos.

(*Folha de S. Paulo*, 4/12/2001.)

a) De 1950 a 1970, a expectativa de vida no país aumentou segundo uma função afim. Determine a lei que define tal função. Qual era a expectativa de vida do brasileiro em 1957? E em 1968?
Observação: Considere os números apresentados no gráfico com apenas uma casa após a vírgula e faça as aproximações necessárias.
b) Supondo-se que o aumento na expectativa de vida se mantenha constante por década, desde 1991, qual será a expectativa de vida do brasileiro em 2030?



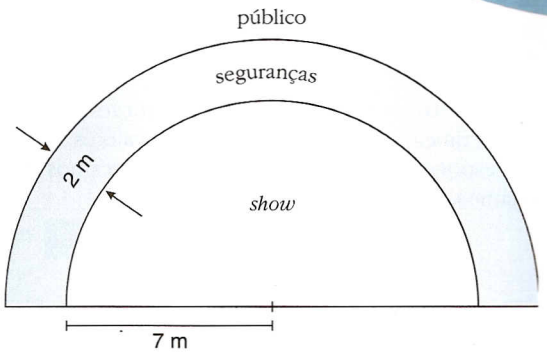
4

FUNÇÃO QUADRÁTICA

1 ○ Introdução

Para a realização de um *show* musical na praça central de uma cidade, foi montado um palco com a forma de semicírculo de raio 7 m.

Para evitar tumultos, os organizadores do evento decidiram colocar seguranças separando o público do palco, conforme mostra a figura.



Se a faixa onde ficarão os seguranças for de 2 m de largura, qual será sua área?

Lembrando que a área de um círculo de raio r é dada por πr^2, temos:

área da faixa = área do semicírculo maior − área do semicírculo menor =

$$= \frac{1}{2} \cdot \pi(7 + 2)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 = 16\pi m^2 \cong 50{,}24\ m^2$$

Se a faixa fosse de 3 m, a área seria:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi(7 + 3)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 = \frac{51\pi}{2} m^2 \cong 80{,}07\ m^2$$

Assim, para cada largura x escolhida corresponde uma área de segurança A(x). O valor de A(x) é uma função de x dada pela lei:

$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \pi(7 + x)^2 - \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 7^2 = \frac{\pi(49 + 14x + x^2 - 49)}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot x^2 + 7\pi \cdot x = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 + 7x\right)$$

Esse é um caso particular de *função polinomial do 2º grau* ou *função quadrática*.

2 ○ Definição

Chama-se *função quadrática*, ou *função polinomial do 2º grau*, qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Vejamos alguns exemplos de funções quadráticas:

1. $f(x) = x^2 + 5x + 4$, em que $a = 1$, $b = 5$ e $c = 4$
2. $f(x) = 2x^2 - 3x - 7$, em que $a = 2$, $b = -3$ e $c = -7$
3. $f(x) = x^2 - 4$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$
4. $f(x) = -3x^2 + 9x$, em que $a = -3$, $b = 9$ e $c = 0$
5. $f(x) = -25x^2$, em que $a = -25$, $b = 0$ e $c = 0$

Exercício

1 Identifique os coeficientes a, b, c das seguintes funções quadráticas:

a) $y = x^2 - 3x + 10$

b) $y = -2x^2 - 5x + 1$

c) $y = 3x^2 - 9$

d) $y = x^2 + 2x$

e) $f(x) = (\sqrt{3}x - 1)^2$

f) $f(x) = (x - 3)(x + 5) + (1 - x)^2$

3 O Gráfico

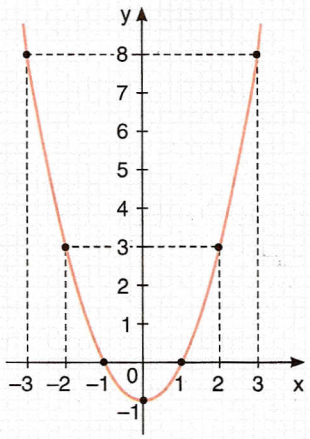
O gráfico de uma função polinomial do 2º grau, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma curva chamada *parábola*.

Exemplo 1

Vamos construir o gráfico da função $y = x^2 - 1$.

Primeiro atribuímos a x alguns valores, depois calculamos o valor correspondente de y e, em seguida, marcamos os pontos no plano e os ligamos.

x	$y = x^2 - 1$
–3	8
–2	3
–1	0
0	–1
1	0
2	3
3	8

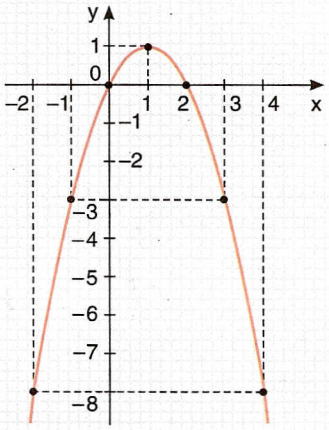


Exemplo 2

Vamos construir o gráfico da função $y = -x^2 + 2x$.

Repetindo o procedimento usado no exemplo 1, temos:

x	$y = -x^2 + 2x$
–2	–8
–1	–3
0	0
1	1
2	0
3	–3
4	–8



Observação

Ao construir o gráfico de uma função quadrática $y = ax^2 + bx + c$, notamos sempre que:

- se $a > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima;
- se $a < 0$, a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Exercício

2 Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções reais:

a) $y = x^2$
b) $y = -x^2 + 3x$
c) $y = x^2 - 2x$
d) $y = x^2 - 2x + 4$
e) $y = -x^2 + 2x - 1$

4 ○ Zeros e equação do 2º grau

Chamam-se *zeros* ou *raízes* da função polinomial do 2º grau $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, os números reais x tais que $f(x) = 0$.

Então as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ são as soluções da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, as quais são dadas pela chamada fórmula de Bhaskara, que você já conhece:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Temos:

$$f(x) = 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Exemplo 3

Vamos obter os zeros da função $f(x) = x^2 + x - 12$.
Temos $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.
Então, substituindo na fórmula, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{cases} x = -4 \\ \text{ou} \\ x = 3 \end{cases}$$

e as raízes são -4 e 3.

Exemplo 4

Vamos calcular as raízes da função $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$.
Temos $a = 4$, $b = -12$ e $c = 9$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

e as raízes são $\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

Exemplo 5

Vamos calcular os zeros da função $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$.
Temos $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$.
Então:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 60}}{12} = \frac{-4 \pm \sqrt{-44}}{12}$$

Como $\sqrt{-44}$ não é número real, essa função *não* tem zeros reais.

Exercícios

3 Determine as raízes (zeros) reais de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

c) $f(x) = -3x^2 + 6$

d) $f(x) = x - 2x^2$

e) $f(x) = x^2 + 5x + 7$

4 Resolva em $\mathbb{R}$ as equações:

a) $(2x - 3) \cdot (x^2 - 7x + 10) = 0$

b) $(-x^2 + 3) \cdot (x^2 - 9) = 0$

c) $x^2 - 4\sqrt{3}x + 12 = 0$

d) $x^2 = 11^2$

5 (UF-MA) Determine os valores de x e y sabendo-se que $x, y \in \mathbb{N} - \{1\}$ e satisfazem à equação $x^2y^2 - 4xy = 12$.

6 (Unip-SP) O conjunto solução da equação $(2x + 0{,}3)^2 - 5(2x + 0{,}3) + 4 = 0$ é $\{a; b\}$, com $a < b$. Qual é o valor de $b - a$?

7 (UE-PA) Um grupo de alunos da Uniterci (Universidade da Terceira Idade) programou uma viagem que custaria no total R$ 900,00. Algumas semanas antes da partida, duas pessoas se juntaram ao grupo, e cada participante pagou R$ 75,00 a menos. Qual era o número de pessoas que inicialmente fariam a viagem?

8 (UF-MS, adaptado) Em um laboratório, dois tipos de bactérias, tipo *A* e tipo *B*, estão sendo pesquisados. Para uma das experiências, foram preparadas duas lâminas, que ficaram em observação por um período de 3 dias. Em cada lâmina, no mesmo instante, foram colocadas culturas dos 2 tipos de bactérias, de acordo com o seguinte quadro:

lâmina 1: cultura de bactérias do tipo *A*
lâmina 2: cultura de bactérias do tipo *B*

Sabe-se que o número de bactérias em cada lâmina, em função do tempo *t*, em horas, durante o período da experiência é dado pelas funções definidas por

bactérias do tipo *A*: $a(t) = -10t^2 + 800t + 2000$;
bactérias do tipo *B*: $b(t) = -10t^2 + 900t + 100$.

Analise as afirmações seguintes, classificando-as em *V* ou *F*. Justifique as falsas.

a) Antes de completar 24 horas de experiência, a cultura da lâmina 1 e a cultura da lâmina 2 apresentaram, num mesmo instante, o mesmo número de bactérias.

b) O número de bactérias mencionadas no item anterior é, em cada lâmina, inferior a 13 mil.

c) Foram colocadas 900 bactérias do tipo *B* na lâmina 2.

Observação

Quantidade de raízes

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado *discriminante*:

- quando Δ é positivo, há duas raízes reais e distintas;
- quando Δ é zero, há só uma raiz real (ou uma raiz dupla);
- quando Δ é negativo, não há raiz real.

Exemplo 6

Vejamos quais são as condições a que m deve obedecer para que a função $y = 5x^2 + 2x + m$:

a) admita duas raízes reais e distintas;
b) tenha duas raízes reais iguais;
c) não tenha raízes reais.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 20\,m$$

Considerando os valores que Δ pode assumir, devemos ter:

a) $\Delta > 0$, então $4 - 20\,m > 0$ e daí $m < \frac{1}{5}$.

b) $\Delta = 0$, então $4 - 20\,m = 0$ e daí $m = \frac{1}{5}$.

c) $\Delta < 0$, então $4 - 20\,m < 0$ e daí $m > \frac{1}{5}$.

Exemplo 7

Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, vamos calcular a soma $x_1 + x_2$ e o produto $x_1 \cdot x_2$:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Exemplo 8

Vamos mostrar que, se a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ tem zeros x_1 e x_2, então ela pode ser escrita na forma $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Para isso vamos utilizar os resultados obtidos no exemplo anterior.

De fato:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right) =$$

$$= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = a[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] =$$

$$= a(x - x_1)(x - x_2)$$

Essa última forma de indicar a lei de uma função quadrática é chamada *forma fatorada*.

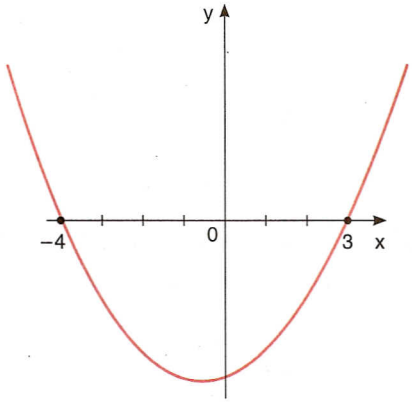
Observação

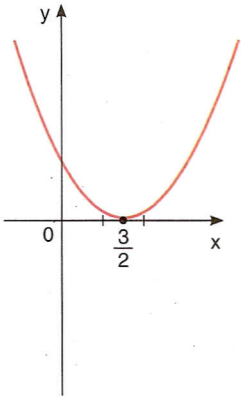
As raízes de uma função quadrática são os valores de x (abscissa) para os quais $y = ax^2 + bx + c = 0$, ou seja, são as abscissas dos pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x.

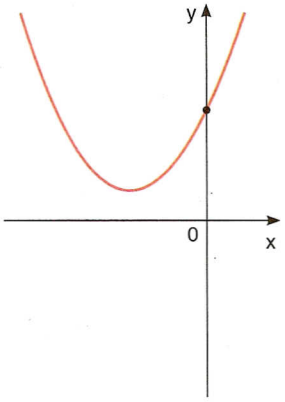
Voltando aos exemplos 3, 4 e 5, temos:

1. O gráfico de $f(x) = x^2 + x - 12$ corta o eixo dos x nos pontos $(-4, 0)$ e $(3, 0)$.
2. O gráfico de $f(x) = 4x^2 - 12 + 9$ toca o eixo dos x no ponto $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.
3. O gráfico de $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ não intercepta o eixo dos x.

Veja, por curiosidade, como são os gráficos dessas três funções:







Exercícios

9 Determine m para que a função dada por $f(x) = x^2 - 3x + m$ tenha duas raízes reais e distintas.

10 Determine p a fim de que o gráfico de $f(x) = 2x^2 + x + (p - 1)$ não intercepte o eixo das abscissas.

11 Mostre que para qualquer valor real *não nulo* de m a equação $mx^2 + 2x + \frac{1}{m} = 0$ tem uma raiz real dupla.

12 Para que valores de p a equação $px^2 + (p + 1)x + (p + 1) = 0$ tem um zero real duplo? Determine, em cada caso, tal raiz.

13 Em uma festa de confraternização de uma empresa, havia x pessoas. Cada pessoa cumprimentou todas as outras uma única vez. Seja y o número total de saudações:

a) Expresse y em função de x.
b) Quantas saudações são dadas, se $x = 70$?
c) Se o número de saudações foi 435, quantas pessoas havia na festa?

14 Na equação do 2º grau $2x^2 - 5x - 1 = 0$, de raízes x_1 e x_2, calcule:

a) $x_1 + x_2$ b) $x_1 \cdot x_2$ c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

15 Em relação à questão anterior, calcule:

a) $x_1^2 + x_2^2$ b) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ c) $x_1^3 + x_2^3$
Sugestão: $a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

16 Uma das raízes da equação $-x^2 + px + 3 = 0$ é igual a 2.

a) Qual é o valor de p?
b) Qual é a outra raiz que essa equação possui?

17 (FEI-SP) Uma das raízes da equação $x^2 - x - a = 0$ é também raiz da equação $x^2 + x - (a + 20) = 0$. Qual é o valor de a?

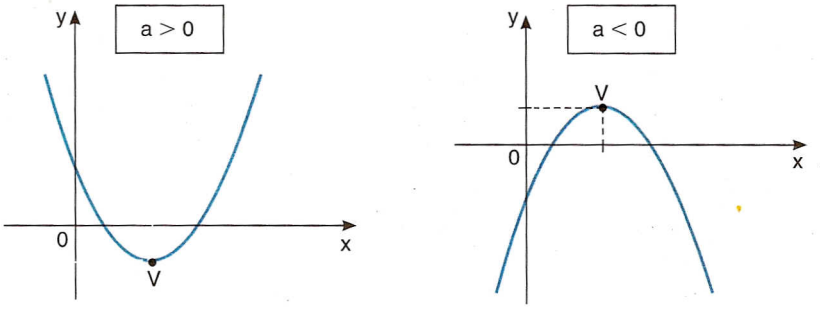
18 A diferença entre as raízes da equação $2x^2 + 3x - m = 0$ é igual a $\frac{1}{2}$. Calcule o valor de m.

19 (Funec-MG) Qual é o valor de m na equação $x^2 - (m + 5)x + m + 1 = 0$, para que as raízes sejam simétricas?

20 As raízes da equação $x^2 - 2px + 8 = 0$ são positivas e uma é o dobro da outra. Qual é o valor de p?

5 ○ Coordenadas do vértice da parábola

Quando $a > 0$, a parábola tem concavidade voltada para cima e um ponto de mínimo V; quando $a < 0$, a parábola tem concavidade voltada para baixo e um ponto de máximo V.



Nosso objetivo é obter as coordenadas do ponto V, chamado vértice da parábola.
Vamos retomar a fórmula da função quadrática e escrevê-la de outra forma:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[\left(x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

Observando esta última forma, podemos notar que a, $\frac{b}{2a}$ e $\frac{\Delta}{4a^2}$ são constantes. Apenas x é variável. Daí:

- se $a > 0$, então o valor mínimo de y ocorre quando ocorrer o valor mínimo para $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$; como $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre maior ou igual a zero, seu valor mínimo ocorre quando $x + \frac{b}{2a} = 0$, ou seja, quando $x = -\frac{b}{2a}$; nesta situação, o valor mínimo de y é $y = a\left[0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = -\frac{\Delta}{4a}$;
- se $a < 0$, por meio de raciocínio semelhante concluímos que o valor máximo de y ocorre quando $x = -\frac{b}{2a}$; nesta situação, o valor máximo de y é $y = a\left(0 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Portanto, em ambos os casos as coordenadas de V são $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Exemplo 9

Vamos determinar as coordenadas do vértice da parábola que é o gráfico de $y = 2x^2 - 5x + 2$.

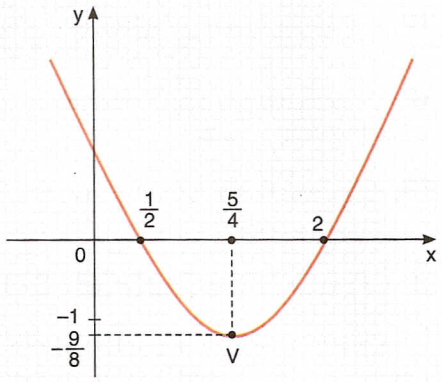
Temos:

$$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{4}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9}{8}$$

então, $V = \left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$.

Para facilitar a construção do gráfico, encontre as raízes da equação.

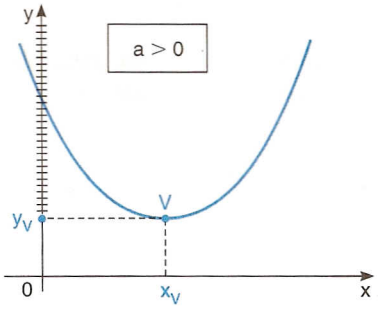


6 ○ Imagem

O conjunto imagem Im da função $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, é o conjunto dos valores que y pode assumir. Há duas possibilidades:

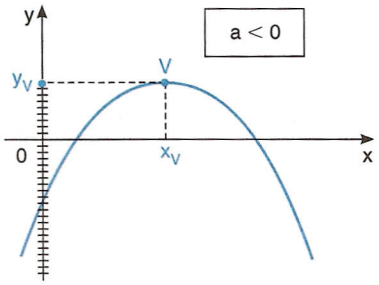
▶ **1ª** quando $a > 0$,

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



▶ **2ª** quando $a < 0$,

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant y_V = -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$



Exercícios

21 Determine o valor máximo (ou mínimo) e o ponto de máximo (ou mínimo) de cada uma das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = -\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x - \frac{1}{2}$

22 (UC-GO) Suponha que numa fábrica de refrigeradores o custo, em reais, de cada geladeira é dado pela função $C(x) = x^2 - 40x + 500$, em que x é a quantidade de geladeiras produzidas. (Obs.: o gráfico desta função é uma parábola de concavidade voltada para cima, que só tem significado econômico no primeiro quadrante.)

Assinale *V* ou *F* nas proposições seguintes, justificando as falsas:

a) Quando se produzem 10 geladeiras, o custo de cada geladeira é de R$ 200,00.

b) A produção de 20 geladeiras é a que proporciona o menor custo de cada geladeira.

c) O conjunto imagem da função anteriormente definida é qualquer número real não-negativo.

d) A função $C_t(x) = x^3 - 40x^2 + 500x$ representa o custo total de produção quando se produzem x geladeiras.

e) O custo total para se produzirem 50 geladeiras é de R$ 1 000,00.

23 (UCDB-MT) Uma bola lançada para cima, verticalmente, tem sua altura h (em metros) dada em função do tempo t (em segundos) decorrido após o lançamento pela fórmula $h = -5t^2 + 20t$.
Qual é a altura máxima atingida pela bola?

24 (UF-AL) Uma empresa de turismo promove um passeio para n pessoas, com $10 \leq n \leq 70$, no qual cada pessoa paga uma taxa de $(100 - n)$ reais. Nessas condições, o dinheiro total arrecadado pela empresa varia em função do número n. Qual é a maior quantia que a empresa pode arrecadar?

25 (FGV-SP) Num parque de diversões A, quando o preço de ingresso é R$ 10,00, verifica-se que 200 freqüentadores comparecem por dia; quando o preço é R$ 15,00, comparecem 180 freqüentadores por dia.

a) Admitindo que o preço (p) relaciona-se com o número de freqüentadores por dia (x) através de uma função do 1º grau, obtenha essa função.
b) Num outro parque B, a relação entre p e x é dada por $p = 80 - 0{,}4x$. Qual é o preço que deverá ser cobrado para maximizar a receita diária?

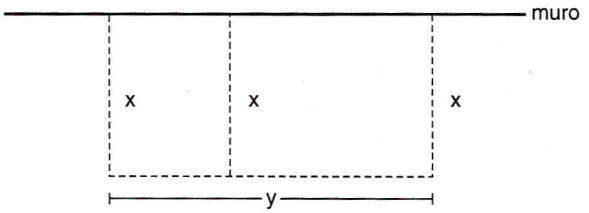
26 Um pintor de quadros de uma feira de artesanato calculou que o custo total de uma tela pequena é de R$ 30,00. Ele acredita que, se vender cada tela por x reais, venderá, por mês, $90 - x$ telas $(0 < x < 90)$.

a) O lucro L obtido pelo pintor é função do preço de venda x. Escreva a lei que define $L(x)$.
b) Qual será seu lucro mensal se o preço de venda de cada tela for de R$ 40,00?
c) Para que valor de x o pintor terá lucro máximo? Qual será esse lucro?

27 (UF-GO) Uma agência de turismo deseja fretar um ônibus de 50 lugares. Duas empresas, A e B, candidatam-se para fazer a viagem. Se for contratada a empresa A, o custo da viagem terá uma parte fixa de R$ 280,50, mais um custo, por passageiro, de R$ 12,00. Se for contratada a empresa B, o custo terá um valor fixo de R$ 250,00, mais um custo (C), por passageiro, dado por $C(n) = 35 - 0{,}5n$, sendo n o número de passageiros que fará a viagem.
De acordo com essas informações, assinale V ou F nos itens a seguir, justificando:

a) Se todos os lugares do ônibus forem ocupados, será mais caro contratar a empresa B.
b) Caso contrate a empresa B, o custo máximo da viagem será de R$ 862,50.
c) Para um mesmo número de passageiros, os valores cobrados pelas empresas A e B serão diferentes.
d) Para um custo de R$ 700,50, a empresa A levará mais que o dobro de passageiros que a empresa B.

28 (UF-RN) O sr. José dispõe de 180 metros de tela para fazer um cercado retangular, aproveitando, como um dos lados, parte de um extenso muro reto.
O cercado compõe-se de uma parte paralela ao muro e três outras, perpendiculares a ele (ver figura).



Para cercar a *maior* área possível, com a tela disponível, quais são os valores de x e y, respectivamente?

7 ○ Construção da parábola

É possível construir o gráfico de uma função do 2º grau sem necessariamente ter que montar a tabela de pares (x, y), mas seguindo apenas o roteiro de observações seguinte:

- **1ª** O valor do coeficiente a define a concavidade da parábola.
- **2ª** Os zeros definem os pontos em que a parábola intercepta o eixo dos x.

- **3ª** O vértice $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ indica o ponto de mínimo (se $a > 0$), ou de máximo (se $a < 0$).
- **4ª** A reta que passa por V e é paralela ao eixo dos y é o eixo de simetria da parábola.
- **5ª** Para $x = 0$, temos $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$; então $(0, c)$ é o ponto em que a parábola corta o eixo dos y.

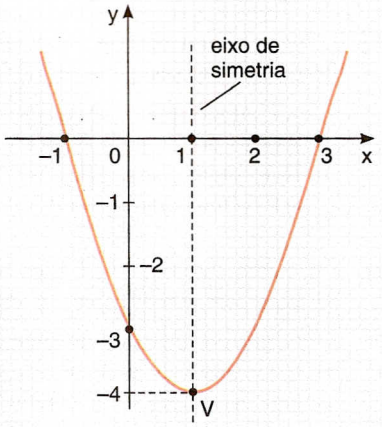
Exemplo 10

Façamos o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 2x - 3$, de acordo com o roteiro acima.

Características:

- concavidade voltada para cima, pois $a = 1 > 0$.
- zeros: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow 3 \end{matrix}$.
- vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (1, -4)$.
- interseção com o eixo y: $(0, c) = (0, -3)$.

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -4\}$.



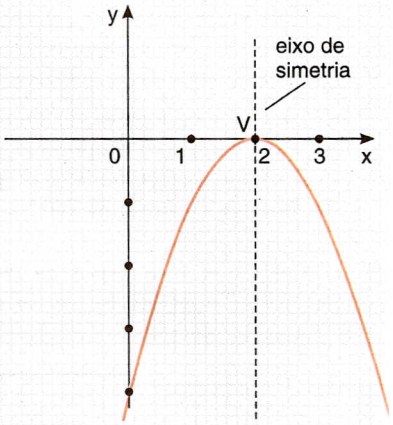
Exemplo 11

Agora, vamos construir o gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$, também sem montar a tabela de pares (x, y).

Características:

- concavidade voltada para baixo ($a = -1$).
- zeros: $x = \frac{-4 \pm 0}{-2} = 2$.
- vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (2, 0)$.
- interseção com o eixo y: $(0, c) = (0, -4)$.

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0\}$.



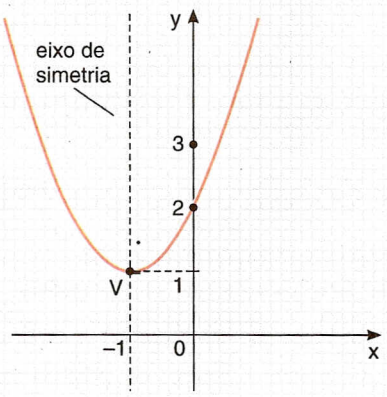
Exemplo 12

Vamos construir o gráfico de $y = x^2 + 2x + 2$.

Características:

- concavidade voltada para cima ($a = 1$).
- não tem zeros, pois $\Delta = -4$.
- vértice: $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (-1, 1)$.
- interseção com o eixo y: $(0, c) = (0, 2)$.

Note que $Im = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$.



Exercícios

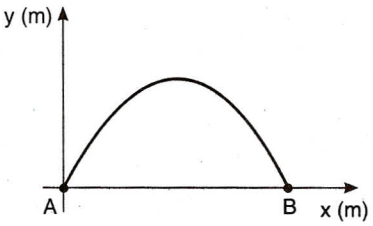
29 Construa o gráfico cartesiano de cada uma das funções definidas em $\mathbb{R}$ e forneça também o conjunto imagem:

a) $y = x^2 - 7x + 10$ b) $y = -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ c) $y = 3x^2 - 4x + 2$

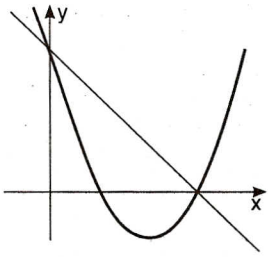
30 Faça o gráfico de cada uma das funções reais:

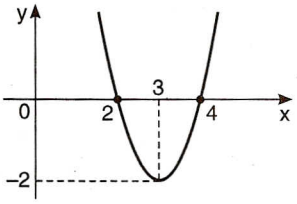
a) $y = -3x^2 + 6x - 3$ b) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ c) $y = -x^2 + 3x - 3$

31 (Puccamp-SP) Na figura ao lado tem-se representada a curva descrita por um projétil, desde o seu lançamento (ponto *A*) até que atinja o solo (ponto *B*).
Se a curva descrita é a parábola de equação $y = -2x^2 + 7x$, qual é a distância AB, em metros?



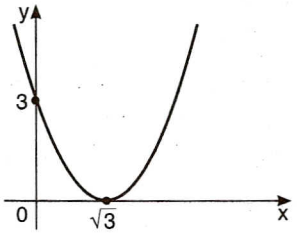
32 (Unopar-PR) A parábola no gráfico ao lado é dada pela função $f(x) = x^2 - 4x + 3$. A reta e a parábola cruzam o eixo cartesiano nos mesmos pontos, conforme mostra o gráfico.
Qual é a equação da reta?



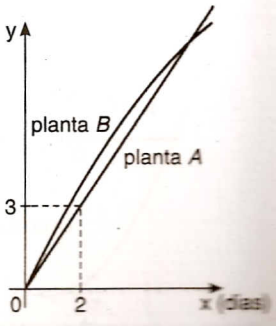
33 

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função do 2º grau cujo gráfico é dado ao lado. Qual é a expressão de *f*? (Sugestão: use a forma fatorada.)

34 Qual é a função real cujo gráfico está representado ao lado?



35 (Vunesp-SP) Duas plantas de mesma espécie, *A* e *B*, que nasceram no mesmo dia, foram tratadas desde o início com adubos diferentes. Um botânico mediu todos os dias o crescimento, em centímetros, dessas plantas. Após 10 dias de observação, ele notou que o gráfico que representa o crescimento da planta *A* é uma reta passando por (2, 3) e o que representa o crescimento da planta *B* pode ser descrito pela lei matemática $y = \frac{24x - x^2}{12}$. Um esboço desses gráficos está apresentado na figura.
Determine:



a) a equação da reta;
b) o dia em que as plantas *A* e *B* atingiram a mesma altura e qual foi essa altura.

36 (UFF-RJ) Considere f e g, funções reais de variável real, definidas por $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = ax^2 + b$.
Sabe-se que $f(-1) = f(2) = 0$ e $g(0) = 1$.

a) Determine as raízes de g.

b) Esboce, numa única figura, os gráficos das funções f e g.

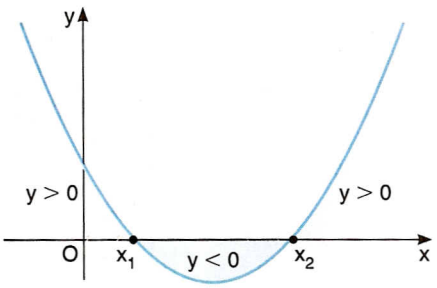
8 ○ Sinal

Consideremos uma função quadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ e determinemos os valores de x para os quais y é negativo e os valores de x para os quais y é positivo.

Conforme o sinal do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$, podem ocorrer os seguintes casos:

▶ $\Delta > 0$

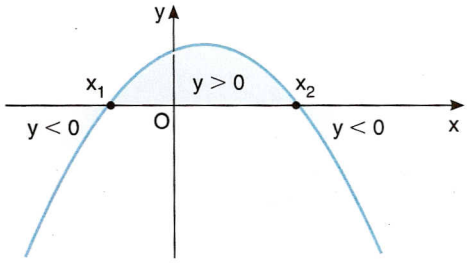
Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais distintos ($x_1 \neq x_2$). A parábola intercepta o eixo Ox em dois pontos e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando $a > 0$

$y > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

$y < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$



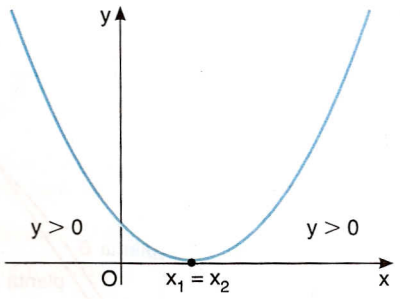
quando $a < 0$

$y > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$

$y < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

▶ $\Delta = 0$

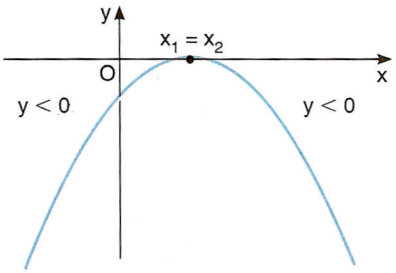
Nesse caso a função quadrática admite dois zeros reais iguais ($x_1 = x_2$). A parábola tangencia o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando $a > 0$

$y > 0, \forall x \neq x_1$

$\nexists x$ tal que $y < 0$



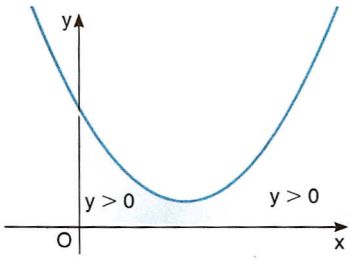
quando $a < 0$

$y < 0, \forall x \neq x_1$

$\nexists x$ tal que $y > 0$

▶ $\Delta < 0$

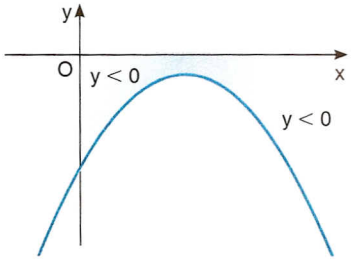
Nesse caso a função quadrática não admite zeros reais. A parábola não intercepta o eixo Ox e o sinal da função é o indicado nos gráficos abaixo:



quando $a > 0$

$y > 0, \forall x$

$\nexists x$ tal que $y < 0$



quando $a < 0$

$y < 0, \forall x$

$\nexists x$ tal que $y \geq 0$

Exemplo 13

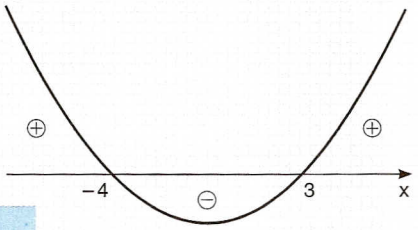
Vamos estudar o sinal da função $y = x^2 + x - 12$.

Temos:

$a = 1 > 0 \rightarrow$ parábola com concavidade para cima

$\Delta = b^2 - 4ac = 1 + 48 = 49 > 0 \rightarrow$ dois zeros reais distintos

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow x_1 = -4$ e $x_2 = 3$



Sinal
$y > 0 \Leftrightarrow x < -4$ ou $x > 3$
$y < 0 \Leftrightarrow -4 < x < 3$

Exemplo 14

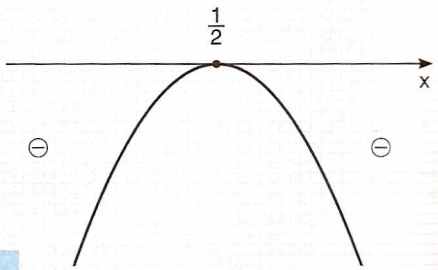
Vamos estudar o sinal de $y = -4x^2 + 4x - 1$.

Temos:

$a = -4 < 0 \rightarrow$ parábola com concavidade para baixo

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0 \rightarrow$ dois zeros reais iguais

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm 0}{-8} = \frac{1}{2}$



Sinal
$\nexists x$ tal que $y > 0$
$y < 0, \forall x \neq \frac{1}{2}$

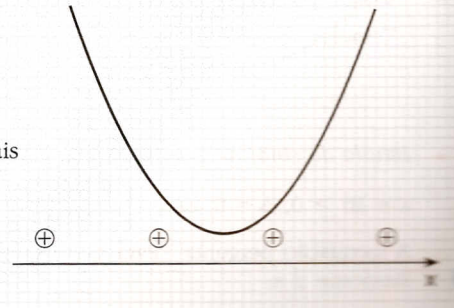
Exemplo 15

Vamos estudar o sinal de $y = 3x^2 + 4x + 5$.

Temos:

$a = 3 > 0 \rightarrow$ parábola com concavidade para cima

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 60 = -44 < 0 \rightarrow$ não há zeros reais



Sinal
$y > 0, \forall x$
$\nexists x$ tal que $y < 0$

Exercícios

37 Estude os sinais das seguintes funções quadráticas:

a) $y = 2x^2 - 5x + 2$ b) $y = -x^2 + 2x + 3$ c) $y = x^2 - 3x + \frac{9}{4}$ d) $y = -x^2 - 2x + 15$

38 Faça o estudo de sinal das seguintes funções de 2º grau:

a) $y = -x^2 - x - 5$ b) $y = -x^2 + 4x - 4$ c) $y = x^2 + 2$ d) $y = x^2 + x$

9 Inequações

Vamos aplicar o estudo do sinal da função quadrática na resolução de inequações.

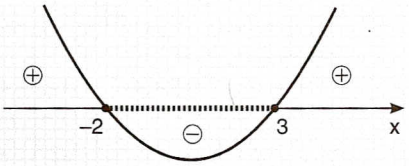
Exemplo 16

Vejamos como resolver a inequação $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Chamemos de y a função quadrática que está no 1º membro: $y = x^2 - x - 6$.

Vamos agora estudar o sinal de y:

$a = 1 > 0$, $\Delta = 25 > 0$, raízes: -2 e 3



A inequação pergunta: "para que valores de x temos $y \leq 0$?".

Resposta: $-2 \leq x \leq 3$ (ou $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$).

Exemplo 17

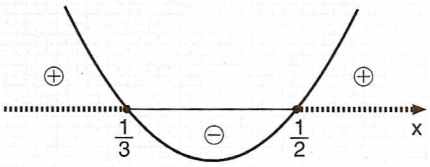
Vejamos como resolver a inequação $4x^2 - x + 1 \geq 4x - 2x^2$.

Vamos passar todos os termos da inequação para um dos membros, por exemplo para o 1º membro:

$$4x^2 - x + 1 \geq 4x - 2x^2$$
$$4x^2 - x + 1 - 4x + 2x^2 \geq 0$$
$$6x^2 - 5x + 1 \geq 0$$

- *Estudo do sinal de $y = 6x^2 - 5x + 1$*

$a = 6 > 0$, $\Delta = 1 > 0$, raízes: $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$



A inequação pergunta: "para que valores de x temos $y \geq 0$?".

Resposta: $x \leq \frac{1}{3}$ ou $x \geq \frac{1}{2}$.

Exemplo 18

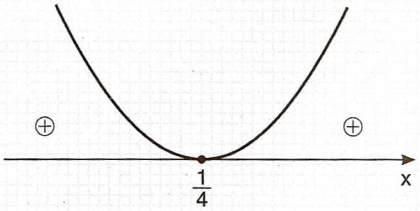
Vamos resolver a inequação $16x^2 < 8x - 1$.

Temos:

$$16x^2 < 8x - 1$$
$$16x^2 - 8x + 1 < 0$$

- *Estudo do sinal de $y = 16x^2 - 8x + 1$*

$a = 16 > 0$, $\Delta = 0$, raiz: $\frac{1}{4}$



A inequação pergunta: "Para que valores de x temos $y < 0$?".

Resposta: $\nexists\, x$.

39 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$
b) $-x^2 + x + 6 > 0$
c) $-2x^2 + 3x \geqslant 0$
d) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$
e) $x^2 - 5 < 0$

40 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x^2 + 3x + 7 < 0$
b) $4x^2 - 4x + 1 \leqslant 0$
c) $-4x^2 + 20x - 25 < 0$
d) $\sqrt{2}x > x^2$
e) $-2x^2 - x \geqslant 3$

41 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $x(x - 8) \geqslant 0$
b) $x^2 > 7^2$
c) $-8x^2 \geqslant 0$
d) $-x^2 > -1$
e) $5^2 < (x - 2)^2$

42 (ESPM-SP) Qual é o número de soluções inteiras da inequação $x^2 - 6x < 7$?

43 (UCDB-MT, adaptado) Uma empresa fundada em 1990 tem, para cada ano n de funcionamento, um lucro igual a $L(n) = 100\,000 \cdot (-n^2 + 22n)$.

a) Em que período a empresa apresentou lucro crescente?
b) A partir de que ano a empresa terá prejuízo?

44 (FGV-SP) O lucro mensal de uma empresa é dado por $L = -x^2 + 30x - 5$, sendo x a quantidade mensal vendida.

a) Qual o lucro mensal máximo possível?
b) Entre que valores deve variar x para que o lucro mensal seja no mínimo igual a 195?

Exemplo 19

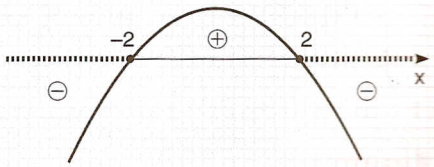
Vejamos como resolver a inequação $4 < x^2 \leqslant 9$.

De fato são duas inequações simultâneas:

$$4 < x^2 \quad \text{(I)} \qquad \text{e} \qquad x^2 \leqslant 9 \quad \text{(II)}$$

Vamos resolver (I): $4 - x^2 < 0$.

- *Estudo do sinal de* $y = 4 - x^2$

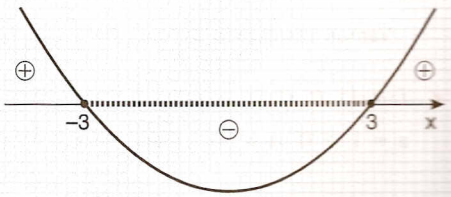


$a = -1 < 0$, $\Delta = 16 > 0$, raízes: -2 e 2

Solução de (I): $x < -2$ ou $x > 2$

Vamos resolver (II): $x^2 - 9 \leqslant 0$.

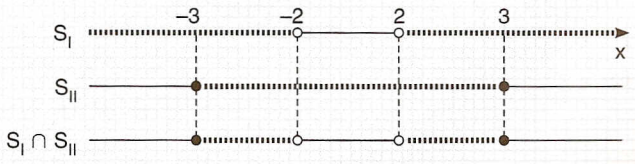
- *Estudo do sinal de* $y = x^2 - 9$



$a = 1 > 0$, $\Delta = 36 > 0$, raízes: -3 e 3

Solução de (II): $-3 \leqslant x \leqslant 3$

Procuremos agora a interseção das duas soluções:



Solução final: $-3 \leqslant x < -2$ ou $2 < x \leqslant 3$.

Exercícios

45 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $1 \leq x^2 \leq 9$ b) $-1 < x^2 - 1 \leq 3$ c) $x < x^2 < 4x$

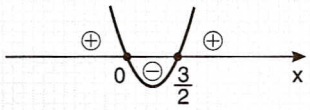
46 Resolva os seguintes sistemas de inequações em $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} x^2 - 5x + 6 \leq 0 \\ x^2 > 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - x^2 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \\ 5x - 3 \geq 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 < 16 \\ x^2 > 9 \end{cases}$

47 (Cefet-MG) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ que satisfazem o sistema $\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 3x < 0 \end{cases}$.

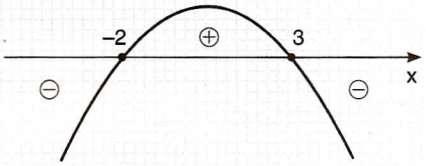
Exemplo 20

Vamos resolver a inequação $(2x^2 - 3x)(6 + x - x^2) < 0$.
Façamos $y_1 = 2x^2 - 3x$ e estudemos o sinal de y_1:

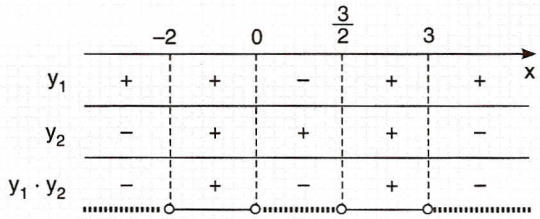


$a = 2 > 0$, $\Delta = 9$, raízes: 0 e $\frac{3}{2}$

Façamos $y_2 = 6 + x - x^2$ e estudemos o sinal de y_2:
$a = -1 < 0$, $\Delta = 25$, raízes: -2 e 3



- *Estudo do sinal de $y_1 y_2$*



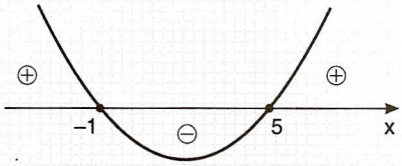
A inequação pergunta: "para que valores de x temos $y_1 \cdot y_2 < 0$?".
Resposta: $x < -2$ ou $0 < x < \frac{3}{2}$ ou $x > 3$.

Exemplo 21

Vamos resolver a inequação $\frac{x^2 - 4x - 5}{4 - 4x + x^2} \geq 0$.

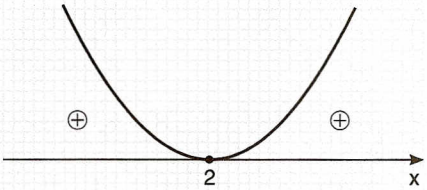
- *Estudo do sinal de $y_1 = x^2 - 4x - 5$*

$a = 1 > 0$, $\Delta = 36$, raízes: -1 e 5

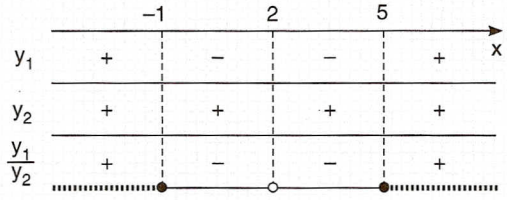


- *Estudo do sinal de $y_2 = 4 - 4x + x^2$*

$a = 1 > 0$, $\Delta = 0$, raiz: 2



- *Estudo do sinal do quociente* $\frac{y_1}{y_2}$



A inequação pergunta: "para que valores de x temos $\frac{y_1}{y_2} \geqslant 0$?".

Resposta: $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 5$.

Exercícios

48 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $(1 - 4x^2)(2x^2 + 3x) > 0$

b) $(x^2 - 5x + 6)(9 - x^2) \leqslant 0$

c) $(x - 2) \cdot (x^2 - 1) > 0$

d) $(2x^2 + 1) \cdot (-x + 3) \leqslant 0$

49 Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $4x^3 - 12x^2 - x + 3 \leqslant 0$.

50 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

a) $\frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$

c) $\frac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

51 Resolva, em $\mathbb{R}$, as inequações:

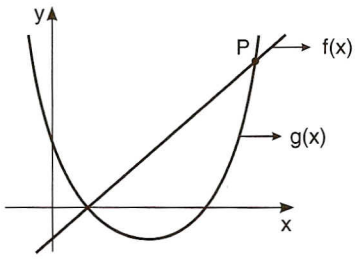
a) $x + \frac{1}{x} \leqslant -2$

b) $\frac{x}{x + 1} - \frac{x}{x - 1} \geqslant 0$

c) $\frac{x - 3}{x - 2} \leqslant x - 1$

d) $\frac{1}{x} < x$

52 (UE-RJ) No sistema de coordenadas cartesianas abaixo, estão representadas as funções $f(x) = 4x - 4$ e $g(x) = 2x^2 - 12x + 10$.



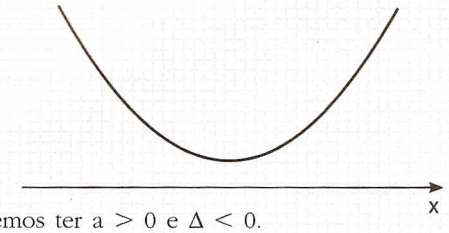
Com base nos dados acima, determine:

a) as coordenadas do ponto P.

b) o conjunto solução da inequação $\frac{g(x)}{f(x)} < 0$, $f(x) \neq 0$.

Exemplo 22

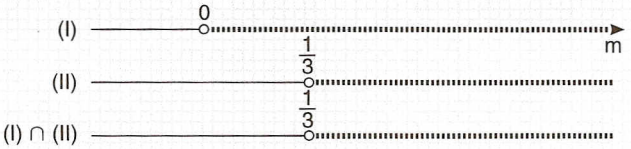
Vejamos qual é a condição sobre $m \in \mathbb{R}$ a fim de que tenhamos $mx^2 + 2x + 3 > 0$ para todo x real. Façamos $f(x) = mx^2 + 2x + 3$. Se, para todo x real devemos ter $f(x) > 0$, então o esboço do gráfico de f é:



Para que isso ocorra, devemos ter $a > 0$ e $\Delta < 0$.
Então:

$a = m > 0$ (I) e $\Delta = 4 - 12m < 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$ (II)

Como (I) e (II) devem ser simultaneamente satisfeitas, façamos (I) $\cap$ (II).



Resposta: $m > \frac{1}{3}$.

Exemplo 23

Vamos determinar o domínio da função real $f(x) = \sqrt{\frac{2x - 1}{x^2 - 4}}$.

Para que f esteja definida, é necessário que o radicando $\frac{2x - 1}{x^2 - 4}$ seja positivo ou nulo.

Então, temos de resolver $\frac{2x - 1}{x^2 - 4} \geqslant 0$ e, para isso, usamos a técnica vista no exemplo 21.

Exercícios

53 Determine $m \in \mathbb{R}$ para que $x^2 + mx + 1 > 0$, para todo x real.

54 Determine $m \in \mathbb{R}$ a fim de que $mx^2 - 2x + m < 0$, qualquer que seja o valor real de x.

55 (Mackenzie-SP) Se $2x^2 - ax + 2a > 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, qual é o maior valor *inteiro* que a pode assumir?

56 (UF-CE) Determine o subconjunto dos números reais que é domínio da função real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

57 Estabeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{6x^2 - 5x - 1}}$

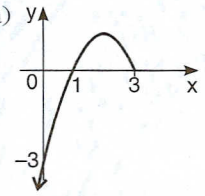
b) $g(x) = \sqrt{3x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 7}$

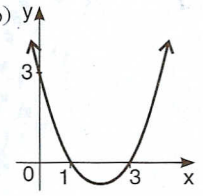
c) $h(x) = \sqrt{\frac{-x + 5}{x^2 + x - 6}}$

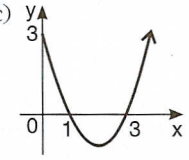
58 (PUC-MG) Todos os pontos da parábola de equação $y = x^2 + ax + 9$ estão acima do eixo das abscissas. Qual é o intervalo ao qual a pode pertencer?

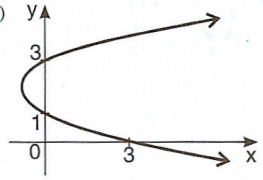
Testes de vestibulares

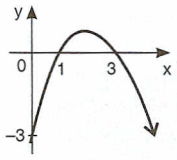
1 (UFF-RJ) Considere a função f: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definida por f(x) = (3 – x) (x – 1).
Identifique a melhor representação do gráfico de *f*.

a)


b)


c)


d)


e)


2 (UF-MG) Considere a equação

$$(x^2 - 14x + 38)^2 = 11^2.$$

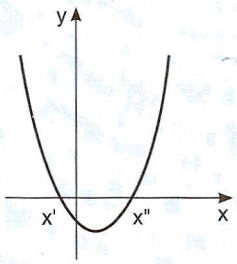
O número de raízes reais distintas dessa equação é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

3 (Cefet-MG) Ao ser cobrada uma falta numa partida de futebol, a trajetória da bola é tal que sua altura *h*, em metros, varia com o tempo *t*, em segundos, de acordo com a equação $h = -t^2 + 2t$. A bola atingirá o solo novamente no instante *t* igual a:

a) 2 c) 4 e) 6
b) 3 d) 5

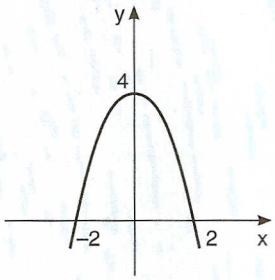
4 (UF-PA) A parábola abaixo representa graficamente a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$.



Assim sendo, podemos afirmar que:

a) a = b = c > 0
b) a > 0, b > 0 e c < 0
c) a > 0, b < 0 e c = 0
d) a > 0, b < 0 e c > 0
e) a > 0, b < 0 e c < 0

5 (Uneb-BA) Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$ a função cujo gráfico está representado na figura, f(1) – f(3) é igual a:



a) 5
b) 6
c) 8
d) 10
e) 11

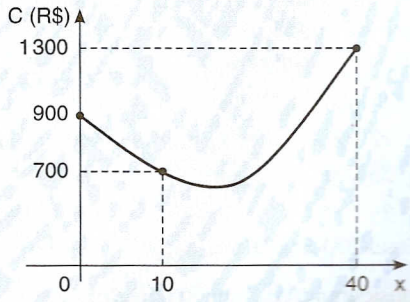
6 (Unip-SP) O número de soluções inteiras do sistema $\begin{cases} 2x - 4 \leq 4 \\ x^2 - 7x + 6 \leq 0 \end{cases}$ é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

7 (Unifor-CE) A equação $x^2 - (k + 1)x + k = 0$, de incógnita *x*, tem duas raízes iguais. Qual é o valor de *k*?

a) –5 c) 1 e) 5
b) –3 d) 3

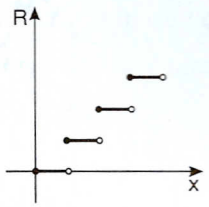
8 (U. F. Santa Maria-RS)

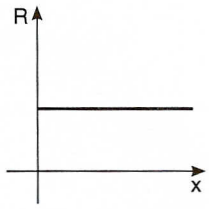


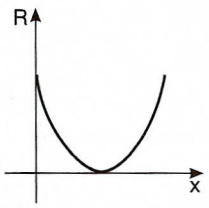
Na produção de *x* unidades mensais de certo produto, uma fábrica tem um custo, em reais, descrito pela função de 2º grau, representada parcialmente na figura. O custo mínimo é, em reais:

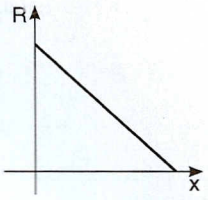
a) 500 c) 660 e) 690
b) 645 d) 675

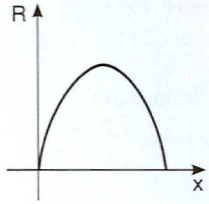
9 (Enem-MEC) Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:
$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato.
O gráfico cartesiano que melhor representa a função $R(x)$, para x real, é:

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

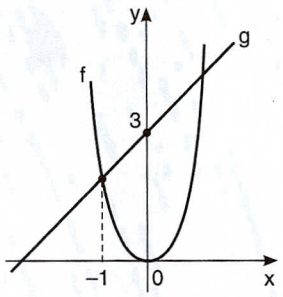
10 (Enem-MEC) Considerando o modelo descrito no exercício anterior, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11 000
b) 22 000
c) 33 000
d) 38 000
e) 44 000

11 (Ucsal-BA) Seja a inequação $\frac{x - 2}{x^2 - 4x} \leqslant 0$.
Considerando os números inteiros que a satisfazem, é correto concluir que:

a) Só dois deles são positivos.
b) Um deles é zero.
c) O produto de todos eles é 6.
d) O menor deles é –2.
e) O maior deles é 4.

12 (Mackenzie-SP) Na figura temos os gráficos das funções f e g. Se $f(x) = 2x^2$, então $g(3)$ vale:



a) 12
b) 10
c) 8
d) 14
e) 6

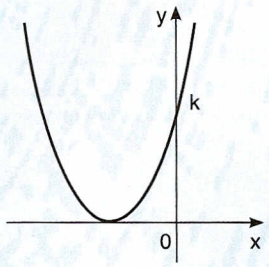
13 (Unirio-RJ) Em uma fábrica, o custo de produção de x produtos é dado por $c(x) = -x^2 + 22x + 1$. Sabendo-se que cada produto é vendido por R$ 10,00, o número de produtos que devem ser vendidos para se ter um lucro de R$ 44,00 é:

a) 3
b) 10
c) 12
d) 13
e) 15

14 (Umesp-SP) O gráfico da função $y = x^2 + kx + m$ é uma parábola cujo vértice é o ponto $V = (-2, -9)$. O valor de $k - m$ é:

a) –9
b) –1
c) 0
d) 1
e) 9

15 (Mackenzie-SP) Na figura, temos o gráfico da função real definida por $y = x^2 + mx + (15 - m)$. Então k vale:



a) 25
b) 18
c) 12
d) 9
e) 6

16 (Mackenzie-SP) A soma dos números inteiros pertencentes ao domínio da função $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$ é:

a) 2
b) –2
c) 3
d) –3
e) 0

17 (UF-AC) O intervalo de valores reais de m para que a equação $(m + 1)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa é:

a) [0, 1]
b)]–1, 1[
c) [–2, 0]
d)]0, 1[
e)]–1, 0[

18 (Fuvest-SP) O valor, em reais, de uma pedra semipreciosa é sempre numericamente igual ao quadrado de sua massa, em gramas. Infelizmente uma dessas pedras, de 8 gramas, caiu e se partiu em dois pedaços. O prejuízo foi o maior possível. Em relação ao valor original, o prejuízo foi de:

a) 92%
b) 80%
c) 50%
d) 20%
e) 18%

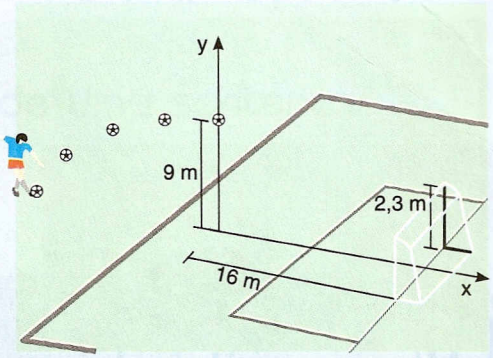
19 (Covest-PE) Uma malharia familiar fabrica camisetas a um custo de R$ 2,00 por peça e tem uma despesa fixa semanal de R$ 50,00. Se são vendidas x camisetas por semana ao preço de $\left(\frac{22}{3} - \frac{x}{30}\right)$ reais a unidade, quantas camisetas devem ser vendidas por semana para se obter o maior lucro possível?

a) 50
b) 60
c) 65
d) 90
e) 80

20 (Fuvest-SP) Os pontos (0, 0) e (2, 1) estão no gráfico de uma função quadrática f. O mínimo de f é assumido no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{4}$. Logo, o valor de f(1) é:

a) $\frac{1}{10}$
b) $\frac{2}{10}$
c) $\frac{3}{10}$
d) $\frac{4}{10}$
e) $\frac{5}{10}$

21 (UE-RJ) Numa partida de futebol, no instante em que os raios solares incidiam perpendicularmente sobre o gramado, o jogador "Chorão" chutou a bola em direção ao gol, de 2,30 m de altura interna. A sombra da bola descreveu uma reta que cruzou a linha do gol. A bola descreveu uma parábola e, quando começou a cair da altura máxima de 9 m, sua sombra se encontrava a 16 m da linha do gol. Após o chute de "Chorão", nenhum jogador conseguiu tocar na bola em movimento.
A representação gráfica do lance em um plano cartesiano está sugerida na figura abaixo:



A equação da parábola era do tipo:

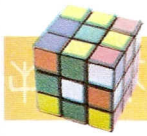
$$y = -\frac{x^2}{36} + c$$

O ponto onde a bola tocou pela primeira vez foi:

a) na baliza.
b) atrás do gol.
c) dentro do gol.
d) antes da linha do gol.

22 (Fuvest-SP) Para que a parábola $y = 2x^2 + mx + 5$ *não* intercepte a reta $y = 3$, devemos ter:

a) $-4 < m < 4$
b) $m < -3$ ou $m > 4$
c) $m > 5$ ou $m < -5$
d) $m = -5$ ou $m = 5$
e) $m \neq 0$



Desafios

1 Os alunos de uma escola alugaram, para a festa de formatura, um barzinho com capacidade para 150 pessoas. Cada aluno comprometeu-se, de início, a pagar R$ 10,00. Caso o barzinho não ficasse totalmente cheio, seu gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R$ 0,50 por "lugar" vazio.

a) Qual a receita obtida se, no dia, comparecessem 120 pessoas?
b) Como se expressa a receita R gerada pela presença de x ($x \leq 150$) alunos?
c) Para que valor de x a receita gerada é máxima? Qual é essa receita?

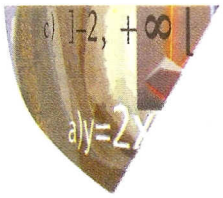
2 (U. F. Juiz de Fora-MG) Em uma pequena indústria, sabe-se que o custo C (em reais) para fabricar uma quantidade q (em metros) de um produto é dado por $C = 6000 + 20q$. Supondo que toda quantidade produzida é vendida, e que a quantidade vendida q (em metros), em função do preço de venda p (em reais), de um metro desse produto, é dada por $q = 300 - 2p$, $0 < p \leq 150$, determine:

a) A função que relaciona o lucro L (em reais) com o preço p.
b) O preço p que proporciona o lucro máximo.

3 O parque do Ibirapuera é um dos símbolos da cidade de São Paulo. Nesta foto, é possível identificar as trajetórias parabólicas descritas pela água jogada por meio de duas bombas. Para um observador na calçada, as bombas e os pontos de alcance atingidos pela água são aproximadamente colineares. Tome uma régua e considere como eixo das abscissas a reta que liga os pontos mencionados. Use a escala 1:2, isto é, cada cm de régua equivale a 2 unidades no nosso sistema cartesiano. Tente determinar as leis que definem as parábolas da figura.

Roberto Pérrigo

Sugestão: Com as considerações acima, note que o domínio dessa função é [0, 21]. Você chegará a um resultado que será o nosso próximo objeto de estudo.

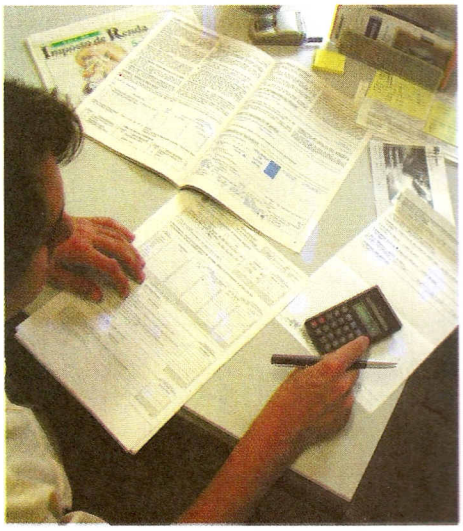


5

FUNÇÃO MODULAR

1 ○ Função definida por mais de uma sentença

O Imposto de Renda Devido (IRD) a ser pago pelo contribuinte, relativo ao ano de 2001, dependia de sua Renda Líquida (RL). O manual para preenchimento da declaração de rendimentos apresentava a tabela abaixo, que permitia calcular o IRD a partir da RL.



Stock Brazil

RL (em reais)	Alíquota de imposto	Parcela a deduzir
até 12 690,00	0%	0
de 12 690,00 a 25 380,00	15%	1 903,50
acima de 25 380,01	27,5%	5 393,25

De acordo com essa tabela, temos:

a) Um contribuinte com RL = R$ 8 000,00 teria IRD = 0

b) Um contribuinte com RL = R$ 20 000,00 teria
IRD = 15% de 20 000 − 1 903,50 =
= 0,15 × 20 000 − 1 903,50 = 1 096,50

c) Um contribuinte com RL = R$ 100 000,00 teria
IRD = 27,5% de 100 000 − 5 393,25 =
= 0,275 × 100 000 − 5 393,25 = 22 106,75

d) Um contribuinte com RL = R$ 200 000,00 teria
IRD = 27,5% de 200 000 − 5 393,25 =
= 0,275 × 200 000 − 5 393,25 = 49 606,75

Em geral, se um contribuinte apresentasse RL = x, como poderia ser calculado o IRD = y? A resposta seria:

- se $0 \leq x \leq 12\,690$, então $y = 0$;
- se $12\,690 < x \leq 25\,380$, então $y = 0{,}15x - 1\,903{,}50$;
- se $x > 25\,380$, então $y = 0{,}275x - 5\,393{,}25$.

Podemos observar que y é uma função de x, definida por três sentenças. Usa-se uma sentença ou outra dependendo do intervalo em que o valor de x se enquadra. Uma função desse tipo é chamada *função definida por mais de uma sentença*.

Exemplo 1

Sendo f uma função definida pelas sentenças:

- se $x < 0$, então $f(x) = 1$
- se $x \geqslant 0$, então $f(x) = x + 1$,

vamos calcular $f(-3)$, $f(-\sqrt{2})$, $f(0)$, $f(2)$ e construir o gráfico de f.

Temos:

$$-3 < 0 \Rightarrow f(-3) = 1$$
$$-\sqrt{2} < 0 \Rightarrow f(-\sqrt{2}) = 1$$
$$0 \geqslant 0 \Rightarrow f(0) = 0 + 1 = 1$$
$$2 \geqslant 0 \Rightarrow f(2) = 2 + 1 = 3$$

Para construir o gráfico de f, fazemos assim:

- *1º passo:* construímos o gráfico da função constante $f(x) = 1$, mas só consideramos o trecho em que $x < 0$ (fig. 1).
- *2º passo:* construímos o gráfico da função afim $f(x) = x + 1$, mas só consideramos o trecho em que $x \geqslant 0$ (fig. 2).
- *3º passo:* reunimos os dois gráficos num só (fig. 3).

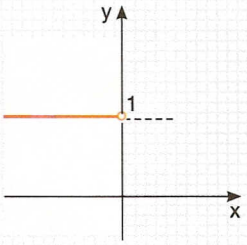


Fig. 1

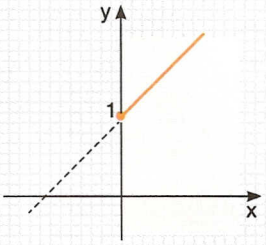


Fig. 2

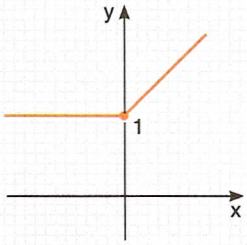
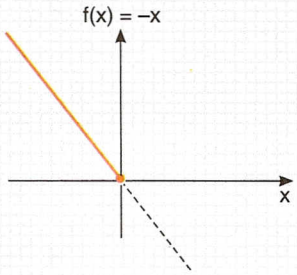
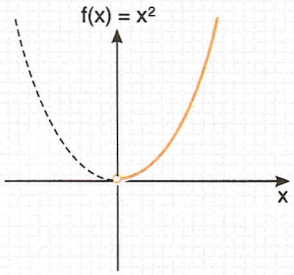


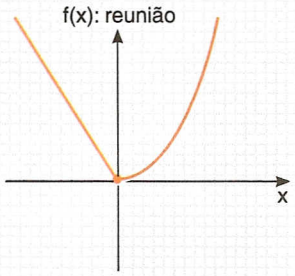
Fig. 3

Exemplo 2

Vamos construir o gráfico da função f tal que: $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ se } x \leqslant 0 \\ x^2, \text{ se } x > 0 \end{cases}$.







Exercícios

1 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 2x - 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Calcule:

a) $f(4)$ b) $f(-3)$ c) $f(0)$ d) $f(\sqrt{2} - 1)$

2 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -x + 2, \text{ se } x \text{ é racional} \\ x^2, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$.

Qual é o valor de:

a) $f(\sqrt{1}) + f(\sqrt{5})$? b) x tal que $f(x) = 0$? c) $f(0{,}333\ldots)$?

3 A diária para um casal em um hotel-fazenda é de R$ 80,00 para hospedagem de até uma semana. A partir daí, a diária cai para R$ 65,00.

a) Quantos reais pagará um casal que se hospedar por 5 dias? E por 10 dias?

b) Seja g(x) a quantia, em reais, gasta por um casal que se hospedou por x dias. Determine a lei que define g(x).

4 É comum observarmos em casas de xerox promoções do tipo:
"Até 100 cópias: R$ 0,10 por cópia. Acima de 100 cópias (de um mesmo original): R$ 0,07 por cópia excedente."
Determine:

a) o valor pago por 130 cópias de um mesmo original.

b) a lei que define a função preço p pago pela reprodução de x cópias de um mesmo original.

5 Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ se } x < -1 \\ x^2 + 5x - 3, \text{ se } -1 \leq x < 2 \\ -4x + 5, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$.

Calcule:

a) $f\left(-\frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{9}{4}\right)$ c) o valor de x tal que $f(x) = 0$

b) $f(\sqrt{2}) - f(0)$

6 Existe, na cidade de São Paulo, um bairro nacionalmente conhecido como centro de compras de roupas: o Bom Retiro.
Um atacadista desse bairro vende conjuntos femininos nas seguintes condições:

até 20 peças → R$ 30,00 por peça

de 21 a 30 peças → desconto de 10% (sobre o preço original) por conjunto que exceder as 20 peças

acima de 30 peças → além do desconto anterior, desconto de 20% (sobre o preço original) por conjunto que exceder as 30 peças

a) Qual é o preço pago por 23 conjuntos? E por 32 conjuntos?

b) Qual é a lei que define o preço (p) em função do número de conjuntos adquiridos (x)?

c) Dispondo de R$ 800,00, quantos conjuntos podem ser comprados?

7 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$, destacando seu conjunto imagem:

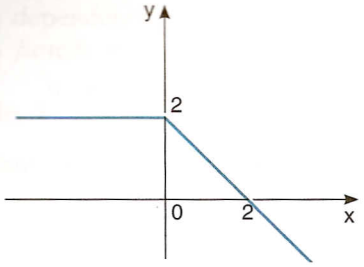
a) $f(x) = \begin{cases} 3, \text{ se } x \geq 0 \\ -1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geq 1 \\ 4 - x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$

8 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$ e determine o conjunto imagem de cada uma delas:

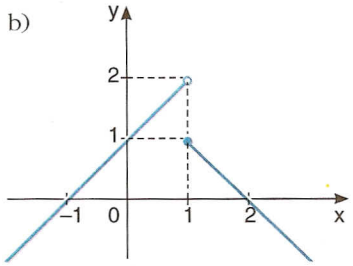
a) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x^2 - 4x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$ c) $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leq 0 \\ \frac{x}{2}, \text{ se } 0 < x \leq 2 \\ 1, \text{ se } x > 2 \end{cases}$

9 Escreva a lei de cada uma das funções cujos gráficos estão representados abaixo:

a)



b)

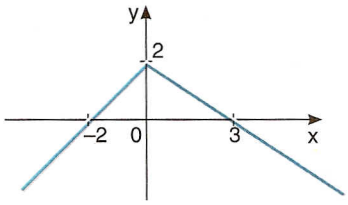


10 (UF-PR) Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, \text{ se } x < -1 \\ x, \text{ se } -1 \leq x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

a) Esboce o gráfico de f no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
b) Determine o conjunto imagem de f.

11 O gráfico seguinte representa a função f dada por $f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ se } x \leq 0 \\ mx + n, \text{ se } x > 0 \end{cases}$:

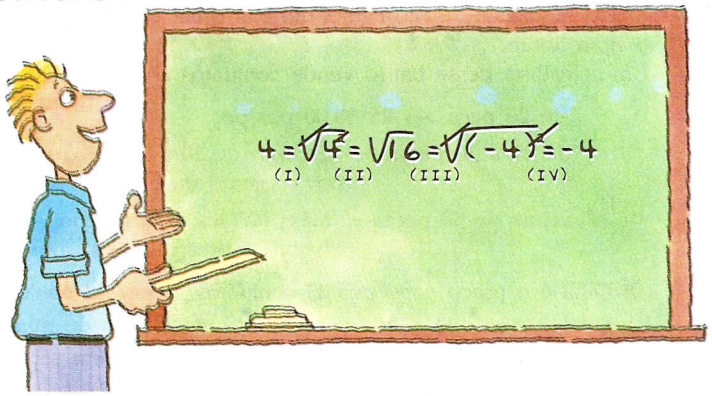


a) Qual é o valor de n + m?
b) Quanto vale f(4) – f(–4)?

2 ○ Módulo de um número

Introdução

Um aluno pediu a seu professor de Matemática que lhe explicasse em que passagem foi cometido um erro nesta seqüência de igualdades ao lado.



Observe que, na passagem I, o índice da raiz (que é 2) foi simplificado com o expoente 2 do radicando, que é igual a 4. O erro está na passagem IV, pois cancelou-se o índice da raiz com o expoente 2 do radicando, que é igual a –4.

A propriedade do cancelamento que foi aplicada duas vezes nessa seqüência só é válida se a base da potência for *positiva*.

Desse modo,

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x, \text{ quando } x \text{ é positivo} \\ -x, \text{ quando } x \text{ é negativo} \end{cases}.$$

Observe que, na segunda possibilidade, $-x$ é um número *positivo*.

Para resolver questões como a apresentada acima, entre outras, definiremos o módulo de um número real de maneira mais profunda que a utilizada no capítulo 1.

Definição

Dado um número real x, chama-se *módulo* ou *valor absoluto* de x, e se indica com $|x|$, o número real não negativo tal que:

$$|x| = x, \text{ se } x \geqslant 0$$
$$\text{ou}$$
$$|x| = -x, \text{ se } x < 0$$

Isso significa que:

- **1º** o módulo de um número real não negativo é igual ao próprio número;
- **2º** o módulo de um número real negativo é igual ao oposto desse número;
- **3º** o módulo de um número real qualquer é sempre maior ou igual a zero: $|x| \geqslant 0, \forall x$.

Assim, podemos identificar alguns módulos:

$$|+1| = +1 \qquad |-5| = +5 \qquad |0| = 0 \qquad \left|+\frac{2}{7}\right| = +\frac{2}{7} \qquad |-\sqrt{2}| = +\sqrt{2}$$

Com essa definição, escrevemos, de modo geral: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Exemplo 3

Qual é o valor de $|1 - \sqrt{2}|$?
Sabemos que $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$, então $1 < \sqrt{2}$, portanto, $1 - \sqrt{2} < 0$ e daí vem:

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1 = 0{,}4142\ldots$$

Exemplo 4

Simplifiquemos a fração $E = \dfrac{|x - 3|}{2x - 6}$.
Da definição de módulo temos:

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x - 3 \geqslant 0, \text{ isto é, se } x \geqslant 3 \\ \text{ou} \\ -(x - 3), \text{ se } x - 3 < 0, \text{ isto é, se } x < 3 \end{cases}$$

Temos, então, duas possibilidades para E:

1ª) se $x > 3$, então $E = \dfrac{x - 3}{2x - 6} = \dfrac{x - 3}{2(x - 3)} = \dfrac{1}{2}$

2ª) se $x < 3$, então $E = \dfrac{-(x - 3)}{2x - 6} = \dfrac{-(x - 3)}{2(x - 3)} = -\dfrac{1}{2}$

Exercícios

12 Calcule:

a) $|-7|$ c) $|0|$ e) $|2 - \sqrt{3}|$ g) $|\sqrt{5} - 2| - |2 - \sqrt{5}|$
b) $|3|$ d) $|0{,}1 - 0{,}3|$ f) $|-6 + 2\pi|$

13 Para $x \in \mathbb{R}$ e $x < 2$, qual é o valor da expressão $E = 1 + \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$?

14 (UF-MS) Se a e b são números reais tais que $\sqrt{\dfrac{a}{b}} + \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \sqrt{13}$, quanto vale $\left|\sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}}\right|$?

3 ○ Função modular

Chama-se *função modular* a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = |x|$.

Utilizando o conceito de módulo de um número real, a função modular pode ser assim caracterizada:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

4 ○ Gráfico

Para construir o gráfico da função modular, procedemos assim:

- *1º passo:* construímos o gráfico da função $f(x) = x$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 0$ (fig. 1), que é a bissetriz do 1º quadrante;
- *2º passo:* construímos o gráfico da função $f(x) = -x$, mas só consideramos a parte em que $x < 0$ (fig. 2), que é a bissetriz do 2º quadrante;
- *3º passo:* reunimos os dois gráficos anteriores (fig. 3).

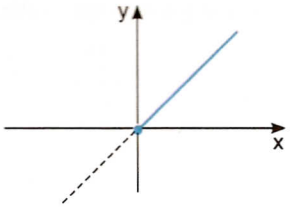


Fig. 1

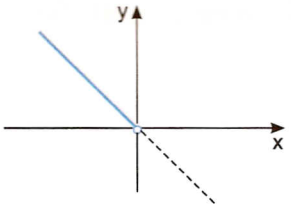


Fig. 2

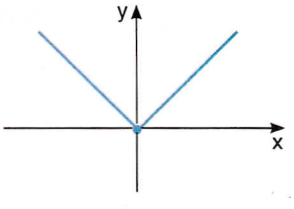


Fig. 3

5 ○ Imagem

O conjunto imagem da função modular é $\mathbb{R}_+$, isto é, a função modular assume somente valores reais não negativos.

6 ○ Função composta

Vamos pensar na função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $f(x) = x + 1$. Então f leva cada x real ao número $x + 1$.

Em seguida, pensemos na função g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida pela lei $g(x) = x^2$. Sabemos que g leva cada x real ao número x^2.

Qual será o resultado final se tomarmos um x real e a ele aplicarmos *sucessivamente* a lei de f e a lei de g?

Teremos:

$$x \xrightarrow[\text{somar 1}]{f} x + 1 \xrightarrow[\text{quadrar}]{g} (x + 1)^2$$

O resultado final é que x é levado a $(x + 1)^2$. Essa função h de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que leva x até $(x + 1)^2$ é chamada *composta* de g com f. Indica-se $h = g \circ f$ (lê-se "g bola f"), tal que $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemplo 5

Se $f(x) = 3x$ e $g(x) = -4x$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(3x) = -4(3x) = -12x$$

Exemplo 6

Se $f(x) = 2x - 1$ e $g(x) = \frac{3}{x}$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(2x - 1) = \frac{3}{2x - 1}$$

Exemplo 7

Se $f(x) = \frac{1}{x + 1}$ e $g(x) = 2x + 1$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x + 1}\right) = 2 \cdot \frac{1}{x + 1} + 1 = \frac{x + 3}{x + 1}$$

Exercícios

15 Sejam f e g funções reais tais que $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x - 2$. Determine:

a) $f(g(5))$ b) $g(f(-2))$ c) $f(g(x))$ d) $g(f(x))$

16 Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 2x$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x + 1$. Determine:

a) $f \circ g(1)$ b) $g \circ f(2)$ c) $f(g(f(4)))$ d) $f(f(-1))$

17 Sejam as funções f e g reais definidas por $f(x) = 2x + a$ e $g(x) = 3x - 2$, e $a \in \mathbb{R}$. Determine a a fim de que, para todo x real, $f(g(x)) = g(f(x))$.

18 (Unicap-PE) Um estudo das condições ambientais de um município indica que a taxa média C de monóxido de carbono no ar, expressa em ppm (partes por milhão), será de $C(p) = 0{,}5p - 1$ quando a população for de p milhares de habitantes.
Daqui a t anos, a população será de $p(t) = 10 + 0{,}1t^2$.

a) Atualmente, qual é a taxa de monóxido no ar?
b) Qual será a taxa de monóxido de carbono daqui a 4 anos?
c) Daqui a quanto tempo a concentração do monóxido será de 9 ppm?
d) Determine o nível de monóxido em função do tempo.

19 (UC-GO) Dadas as funções $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = 2x + 1$, qual é a solução da equação $\frac{f(1) - g(x)}{f[g(2)]} = \frac{f(2)}{f(0)}$?

20 Qual é o valor que a função $y = |x - 3| + |x - 1|$ assume se:

a) $x = -2$? b) $x = 5$? c) $1 < x < 3$?

21 Simplifique a expressão $E = \frac{\sqrt{(xy)^2} - \sqrt{x^2}}{\sqrt{y^2 - 1}}$, se $x < 0$, $y < 0$ (com $y \neq -1$).

22 Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 3$. Resolva, em $\mathbb{R}$, as equações:

a) $f(g(x)) = 0$ b) $g(f(x)) = 1$ c) $g(g(x)) = 1$

23 Sejam f e g funções reais tais que $g(x) = -4x + 2$ e $g(f(x)) = -12x - 18$. Obtenha:

a) $f(x)$ b) $f \circ f(x)$

24 Sabendo que $f(x) = 3x + 5$ e $g(f(x)) = 3x + 3$, obtenha $g(x)$.

25 (U. F. São Carlos-SP) Uma pesquisa ecológica determinou que a população (S) de sapos de uma determinada região, medida em centenas, depende da população (m) de insetos, medida em milhares, de acordo com a equação $S(m) = 65 + \sqrt{\frac{m}{8}}$. A população de insetos, por sua vez, varia com a precipitação (p) de chuva em centímetros, de acordo com a equação $m(p) = 43p + 7{,}5$.

a) Expresse a população de sapos como função da precipitação.
b) Calcule a população de sapos quando a precipitação é de 1,5 cm.

26 (Mackenzie-SP) Os gráficos das funções reais definidas por $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = k^x$, $1 \neq k > 0$ se interceptam num ponto de abscissa 3. Então qual é o valor de $f(g(k))$?

7 ○ Funções compostas com a modular

Vamos mostrar, por meio de exemplos, como é feita a construção dos gráficos de algumas funções que resultam de composição de duas funções em que ao menos uma delas é a modular.

Exemplo 8

Se $f(x) = x - 1$ e $g(x) = |x|$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(x - 1) = |x - 1|$$

Vamos construir o gráfico da função $h(x) = |x - 1|$.

Como $|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x < 1 \end{cases}$, procedemos assim:

- **1º** construímos o gráfico de $y = x - 1$, mas só consideramos a parte em que $x \geqslant 1$ (fig. 1);
- **2º** construímos o gráfico de $y = -x + 1$, mas só consideramos a parte em que $x < 1$ (fig. 2);
- **3º** reunimos os dois gráficos anteriores (fig. 3).

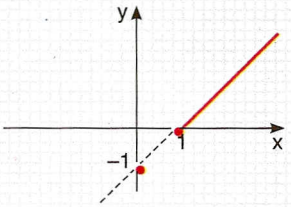


Fig. 1

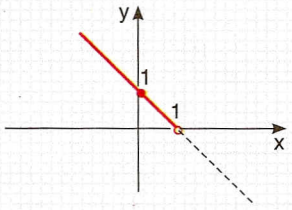


Fig. 2

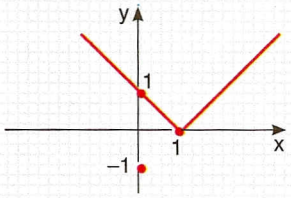


Fig. 3

Exemplo 9

Se $f(x) = |x|$ e $g(x) = x + 1$, então a composta de g com f é dada pela lei:

$$h(x) = g(f(x)) = g(|x|) = |x| + 1$$

Vamos construir o gráfico da função $h(x) = |x| + 1$.
Para cada x, o valor de $h(x)$ é $|x|$ mais 1; portanto, o gráfico de $h(x)$ pode ser obtido assim:

- **1º** construímos o gráfico do $|x|$ (fig. 1);
- **2º** deslocamos (por translação) esse gráfico uma unidade para cima (fig. 2).

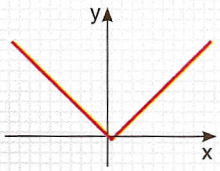


Fig. 1

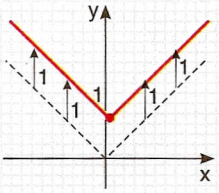


Fig. 2

Exercícios

27 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |2x|$ b) $f(x) = |x - 1|$ c) $f(x) = |4 - x^2|$

28 Construa os gráficos das seguintes funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = |x| - 3$
b) $f(x) = -3 \cdot |x|$
c) $f(x) = 2 \cdot |x| + 1$
d) $f(x) = |3x - 4| + 1$

Sugestão: veja os desafios do capítulo 2.

29 (FGV-SP) Considere a função dada por $f(x) = \sqrt{(x-3)^2}$.

a) Calcule $f(3 + \sqrt{2}) + f(3 - \sqrt{2})$. b) Esboce o gráfico da função.

30 (Unificado-RJ) Sejam as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = |x|$ e
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \to y = x^2 - 2x - 8$

Faça um esboço do gráfico da função $f \circ g$.

31 Construa os gráficos das seguintes funções reais:

a) $f(x) = |x| + x$ b) $f(x) = |x - 3| + x + 2$ c) $f(x) = x \cdot |x|$

32 Faça o gráfico da função real definida por $y = |x| + |x - 1|$.
Sugestão: de acordo com a definição de $|x|$ e de $|x - 1|$ considere três intervalos: $x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$ e $x \geq 1$.

33 (UF-GO) Analise as afirmações seguintes, assinalando *V* ou *F*:
Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |1 - |x||$. Assim,

a) $f(-4) = 5$.
b) o valor mínimo de f é zero.
c) f é crescente para x no intervalo $[0, 1]$.
d) a equação $f(x) = 1$ possui três soluções reais distintas.

8 Equações modulares

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

$$|x| = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = +1 \text{ ou } x = -1$$
$$|x| = 7 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = +7 \text{ ou } x = -7$$
$$|x| = \frac{2}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{25} \Rightarrow x = +\frac{2}{5} \text{ ou } x = -\frac{2}{5}$$

De modo geral, sendo k um número positivo, temos:

$$|x| = k \Rightarrow x = k \text{ ou } x = -k$$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas equações modulares.

Exemplo 10

Vamos resolver a equação $|2x + 1| = 3$.
Temos:

$$|2x + 1| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -3 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$

$S = \{1, -2\}$

Exemplo 11

Vamos resolver a equação $|3x + 1| = |x - 5|$.
Temos:

$$|3x + 1| = |x - 5| \Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = x - 5 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3 \\ \text{ou} \\ 3x + 1 = -(x - 5) \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$S = \{-3, 1\}$

Exemplo 12

Vamos resolver a equação $|3x + 2| = x + 1$.
Para todo x real, sabemos que $|3x + 2| \geqslant 0$. Assim, para que a igualdade $|3x + 2| = x + 1$ seja possível, devemos ter $x + 1 \geqslant 0$, ou seja, $x \geqslant -1$.
Supondo $x \geqslant -1$, temos:

$$|3x + 2| = x + 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2 = x + 1 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ 3x + 2 = -(x + 1) \Rightarrow 4x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Como $-\frac{1}{2} \geqslant -1$, então $-\frac{1}{2}$ é solução.

Como $-\frac{3}{4} \geqslant -1$, então $-\frac{3}{4}$ é solução.

$$S = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right\}$$

Exercícios

34 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $|x| = 4$
b) $|2x - 1| = 3$
c) $|x^2 - 5x + 5| = 1$
d) $|x^2 - 2| = -1$

35 Resolva em $\mathbb{R}$:

a) $|3x - 11| = |-2x + 5|$
b) $|2x - 3| = x$
c) $|2x + 5| = -4x + 1$
d) $|4x - 3| = 3 - 4x$

36 (UF-MS) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$.

37 (UF-RJ) Durante o ano, uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função $L(x) = 50\,(|x - 100| + |x - 200|)$, em que $x = 1, 2, \ldots, 365$ corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais.
Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10 000,00.
Sugestão: analise três casos: $x < 100$, $100 \leqslant x < 200$ e $x \geqslant 200$.

38 Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação: $|x|^3 - 7 \cdot |x|^2 + 6 \cdot |x| = 0$

39 (Cefet-MG) Qual é o número de soluções reais da equação $||x^2 - 2| - 4| = 2$?

9 Inequações modulares

Notemos uma propriedade do módulo dos números reais:

$$|x| < 2 \Rightarrow x^2 < 4 \Rightarrow -2 < x < 2$$
$$|x| > 2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow x < -2 \text{ ou } x > 2$$

De modo geral, sendo k um número real positivo, temos:

$$|x| < k \Rightarrow -k < x < k$$
$$|x| > k \Rightarrow x < -k \text{ ou } x > k$$

Utilizando essa propriedade, vejamos como solucionar algumas inequações modulares.

Exemplo 13

Vamos resolver a inequação $|x - 3| < 5$.
Temos:

$|x - 3| < 5 \Rightarrow -5 < x - 3 < 5 \Rightarrow -5 + 3 < x < 5 + 3$

$S = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 8\}$

Exemplo 14

Vamos resolver a inequação $|3x - 4| > 2$.
Temos:

$$|3x - 4| > 2 \Rightarrow \begin{cases} 3x - 4 < -2 \Rightarrow 3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \\ \text{ou} \\ 3x - 4 > 2 \Rightarrow 3x > 6 \Rightarrow x > 2 \end{cases}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > 2\right\}$$

Exemplo 15

Vamos resolver a inequação $|2x + 1| \geq x - 3$.
Sabemos que:

$$|2x + 1| = \begin{cases} 2x + 1, \text{ se } x \geq -\frac{1}{2} \text{ (I)} \\ \text{ou} \\ -(2x + 1), \text{ se } x < -\frac{1}{2} \text{ (II)} \end{cases}$$

Assim, temos de analisar duas possibilidades:

(I) $x \geq -\frac{1}{2}$ *(que chamaremos de condição a)*

A inequação dada fica sendo $2x + 1 \geq x - 3$, e daí vem $x \geq -4$ (que chamaremos de condição *b*).
Fazendo a interseção das condições *a* com *b*, vem:

$$S_1 = \left\{x \in \mathbb{R} | x \geq -\frac{1}{2}\right\}$$

(II) $x < -\frac{1}{2}$ *(condição c)*

A inequação dada fica sendo $-2x - 1 \geq x - 3$, e daí vem $x \leq \frac{2}{3}$ (condição *d*).

zendo a interseção das condições *c* e *d*, vem:

$$S_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\right\}$$

ıtão, a solução da inequação dada é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \mathbb{R}$$

Exercícios

)lva em $\mathbb{R}$ as inequações:

x| ⩾ 4 b) |x| ⩽ 2 c) |x − 1| ⩾ 3 d) |−3x + 5| < 8

)lva, em $\mathbb{R}$, as desigualdades:

$|x^2 - x - 4| > 2$ b) $|x^2 - 3x - 4| \leqslant 6$ c) $|x| \geqslant x^2$

ıbeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

$f(x) = \dfrac{x + 1}{\sqrt{|2x - 3|}}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3 - |x|}}$

ı determinado mês, verificou-se que o número *n* de pessoas que compravam no supermercado perbarato era dado pela lei: $n(x) = 20 \cdot |x - 25| + 300$, em que x = 1, 2, 3, ..., 30 representa cada ı do mês.

Em que dias do mês 400 pessoas compraram produtos no supermercado Superbarato?
Em que dia do mês foi registrado o *menor* número de visitas ao supermercado? Qual foi esse número?
Em que dias do mês mais de 350 pessoas efetuaram compras no supermercado?

esolva em $\mathbb{R}$ as inequações:

$|x + 3| \geqslant |x - 1|$ b) $x \cdot |x| \geqslant 4x$

Testes de vestibulares

. F. Ouro Preto-MG) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, da por:

$$f(x) = \begin{cases} 10x + 5, \text{ se } x < -1 \\ x^2 - 1, \text{ se } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 5x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

ıtão, o valor de $f(-\sqrt{2}) + f(2\sqrt{2}) + f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ é n número:

inteiro. c) racional. e) irracional.
) par. d) ímpar.

JF-PI) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$x) = \begin{cases} x^2 - 1, \text{ se } x < 1 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

. equação f(x) = 0 possui:

) 1 solução. d) 4 soluções.
) 2 soluções. e) nenhuma solução.
) 3 soluções.

3 (PUC-MG) Sendo $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x + 2, \text{ se } x > 1 \end{cases}$ e $m = \sqrt{(-3)^2}$, o valor de f(m) é:

a) −10 b) −1 c) 5 d) 6 e) 8

Para responder às questões 4, 5 e 6, leia o texto abaixo:

Nos quadros a seguir estão as contas de luz e água de uma mesma residência.

Além do valor a pagar, cada conta mostra como calculá-lo, em função do consumo de água (em m^3) e de eletricidade (em kWh). Observe que, na conta de luz, o valor a pagar é igual ao consumo multiplicado por um certo fator. Já na conta de água, existe uma tarifa mínima e diferentes faixas de tarifação.

Companhia de eletricidade	
fornecimento	**valor (R$)**
401 kWh × 0,13276000	53,23

Companhia de saneamento Tarifas de água/m³			
faixas de consumo	**tarifa**	**consumo**	**valor (R$)**
até 10	5,50	tarifa mínima	5,50
11 a 20	0,85	7	5,95
21 a 30	2,13		
31 a 50	2,13		
acima de 50	2,36		
		Total	11,45

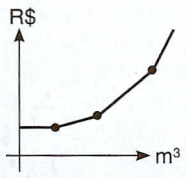
4 (Enem-MEC) Suponha que, no próximo mês, dobre o consumo de energia elétrica dessa residência. O novo valor da conta será de:

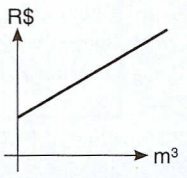
a) R$ 55,23
b) R$ 106,46
c) R$ 802,00
d) R$ 100,00
e) R$ 22,90

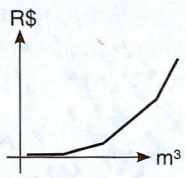
5 (Enem-MEC) Suponha agora que dobre o consumo de água. O novo valor da conta será de:

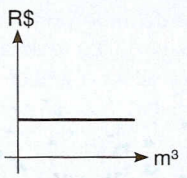
a) R$ 22,90
b) R$ 106,46
c) R$ 43,82
d) R$ 17,40
e) R$ 22,52

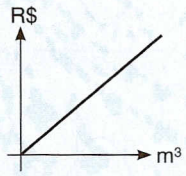
6 (Enem-MEC) Dos gráficos a seguir, o que melhor representa o valor da conta de água, de acordo com o consumo, é:

a) 

d) 

b) 

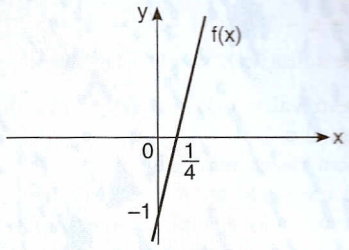
e) 

c) 

7 (Unifor-CE) Sejam f e g funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definidas por $f(x) = kx + 3$ e $g(x) = 2x$. Se $f(g(-3)) = -9$, então a função $g \circ f$ é dada por:

a) $g(f(x)) = 4x + 3$
b) $g(f(x)) = 4x - 3$
c) $g(f(x)) = 4x + 9$
d) $g(f(x)) = 4x - 6$
e) $g(f(x)) = 4x + 6$

8 (Unirio-RJ)



Com a função f(x), representada no gráfico acima, e com a função g(x), obtém-se a composta g(f(x)) = x. A expressão algébrica que define g(x) é:

a) $-\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
b) $-\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
c) $\frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
d) $\frac{x}{4} - \frac{1}{4}$
e) $\frac{x}{4} + 1$

9 (Fafi-MG) O conjunto solução da equação $|x^2 + x - 5| = |4x - 1|$ está contido no conjunto dos:

a) naturais
b) inteiros não nulos
c) irracionais não negativos
d) reais não positivos

10 (U. F. Juiz de Fora-MG) O número de soluções negativas da equação $|5x - 6| = x^2$ é:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

11 (U. Tuiuti-PR) As raízes reais da equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$ são tais que:

a) a soma delas é –1
b) o produto delas é –6
c) ambas são positivas
d) o produto delas é –4
e) n. d. a.

12 (FEI-SP) O conjunto imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1 - |x - 2|$ é:

a) $\{y \in \mathbb{R} | y \leq 1\}$
b) $\{y \in \mathbb{R} | y \geq 1\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} | y > 0\}$
d) $\{y \in \mathbb{R} | y \leq 2\}$
e) $\{y \in \mathbb{R} | y \geq 2\}$

13 (Facs-BA) Considere as funções $f(x) = x - 1$ e $g(x) = x^2 - 4$.

Sobre a função $h(x) = (g \circ f)(x)$, pode-se afirmar:

a) tem valor máximo no ponto de abscissa igual a 1.
b) tem raízes reais e iguais.
c) é crescente no intervalo $[1, +\infty[$.
d) tem como imagem o intervalo $]-\infty, -4]$.
e) tem gráfico simétrico em relação ao eixo OY.

14 (Unit-MG) Os gráficos de $f(x) = x$ e $g(x) = |x^2 - 1|$ têm 2 pontos em comum. A soma das abscissas dos pontos em comum é:

a) $\sqrt{5}$ b) 1 c) -1 d) 0

15 (UA-AM) Se $f(g(x)) = x$ e $f(x) = \frac{x + 3}{2}$, então $g(x)$ é igual a:

a) $2x - 3$
b) $3x + 2$
c) $x + 3$
d) $\frac{x + 2}{2}$
e) $\frac{2}{x + 3}$

16 (Fatec-SP) A igualdade $-|-x| = -(-x)$ é verdadeira para todos os elementos do conjunto:

a) $\mathbb{R}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 3\}$

17 (Uneb-BA) O domínio da função $f(x) = \sqrt{2 - |x - 1|}$ é o conjunto:

a) $]1, 3[$
b) $]1, 3]$
c) $[-1, 3]$
d) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$
e) $]-\infty, -3[\cup [1, +\infty[$

18 (Unifor-CE) Relativamente à função f, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3 \cdot |x| + 1$, é correto afirmar que:

a) f é decrescente para todo $x \leq 1$.
b) f é crescente para todo $x \neq 0$.
c) $f(x) = -2$ para algum $x \in \mathbb{R}$.
d) $f(x) = f(-x)$.
e) $f(x) = -f(x)$.

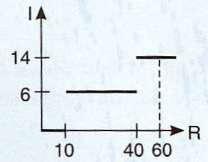
19 (PUC-RS) O domínio da função real f definida por $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$ é:

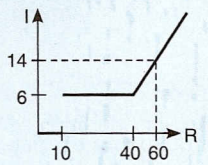
a) $\mathbb{R}^*$
b) $\mathbb{R}_+$
c) $[1; +\infty)$
d) $(1; +\infty)$
e) $(0; +\infty)$

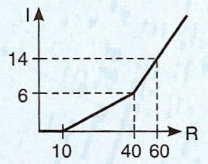
20 (Covest-PE) Em um certo país, o imposto (I) é calculado em termos da renda (R) do cidadão, utilizando a equação $I = t \cdot R - D$, em que a taxa (t) e a dedução (D) dependem da renda de acordo com a tabela abaixo:

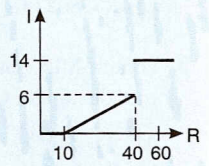
Renda (R)	Taxa (t)	Dedução (D)
até 10 000	0	0
entre 10 000 e 40 000	0,2	2 000
a partir de 40 000	0,4	10 000

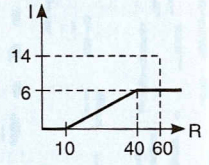
Qual dos gráficos a seguir melhor expressa o imposto como função de renda?
Obs.: Os valores da renda e imposto nos gráficos foram divididos por 1 000.

a)


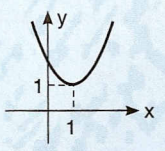
b)


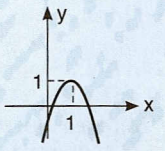
c)


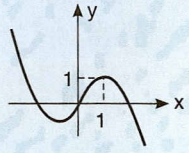
d)


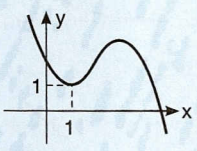
e)


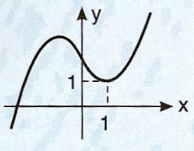
21 (Fuvest-SP) O *módulo* $|x|$ de um número real x é definido por $|x| = x$, se $x \geq 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Das alternativas abaixo, a que melhor representa o gráfico da função $f(x) = x|x| - 2x + 2$ é:

a)


b)


c)


d)


e)


Desafios

1 (Fuvest-SP)

a) Esboce, para x real, o gráfico da função $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$.
b) Para que valores reais de x temos $f(x) > 2x + 2$?
c) Encontre as raízes de $f(x)$.

2 (UF-MG) Observe a tabela abaixo:

Tabela do Imposto de Renda num determinado mês

Rendimento para base de cálculo do mês (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir (R$)
Até 900,00	—	Isento
Acima de 900,00 até 1 800,00	15	135,00
Acima de 1 800,00	25	315,00

Essa tabela é utilizada para calcular o imposto de renda a ser pago à Receita Federal por um trabalhador assalariado no mês em questão.
Para se obter o *rendimento para base de cálculo*, deve-se subtrair de seu rendimento bruto todas as deduções a que ele tem direito.
Ao rendimento para base de cálculo aplica-se a *alíquota* correspondente e, em seguida, subtrai-se a *parcela a deduzir*, também correspondente, de acordo com a tabela, obtendo-se assim o valor do imposto de renda a ser pago.
Nesse mês, um trabalhador, cujo rendimento bruto foi de R$ 2 000,00, teve direito somente às seguintes deduções: R$ 90,00 por dependente e R$ 200,00 pagos à Previdência.
Nessas condições, sabendo-se que o valor do imposto pago por esse trabalhador, nesse mês, foi de R$ 108,00, qual foi o número de dependentes considerado?

3 Uma proposta de cobrança do IPTU (Imposto Predial e Territorial Urbano) é o chamado *IPTU progressivo*, em que o valor venal de um imóvel é dividido segundo o critério de faixas, isto é, o valor é submetido a mais de uma alíquota de imposto.
Para entender esse cálculo, observe o cálculo do IPTU de um imóvel na cidade de São Paulo, cujo valor venal é 430 mil reais:

Tabela do IPTU de 2002
Uso residencial

Faixa	Limites (R$)	Alíquota
A	De 0 a 50 mil	0,8%
B	De 50 mil a 100 mil	1%
C	De 100 mil a 200 mil	1,2%
D	De 200 mil a 400 mil	1,4%
E	Acima de 400 mil	1,6%

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 26/10/2001.

a) Qual é o valor do IPTU de um apartamento cujo *valor venal* é de 80 mil reais?
b) Qual é o valor do IPTU de um apartamento cujo *valor de mercado* é de 350 mil reais?
c) Se o IPTU de um imóvel residencial equivale a R$ 1 140,00, qual é o *valor de mercado* desse imóvel?

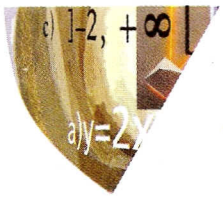
Cálculo do IPTU

As alíquotas incidem sobre o valor venal dos imóveis, que foi corrigido e ficou, em média, equivalente a 70% do valor de mercado

Cálculo de uma residência com valor venal de R$ 430 mil (valor de mercado de R$ 614 mil)

Faixa	Parcela de valor (R$)	Alíquota	Parcela de imposto (R$)
A	50 mil	0,8%	400
B	50 mil	1%	500
C	100 mil	1,2%	1 200
D	200 mil	1,4%	2 800
E	30 mil	1,6%	480
Total:	430 mil	—	5 480

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 26/10/2001.



6

FUNÇÃO EXPONENCIAL

1 ○ Potência de expoente natural

Definição

Sendo dados um número real a e um número natural n, com $n \geqslant 2$, chama-se *potência de base* ***a*** *e expoente* ***n*** o número a^n que é o produto de n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Dessa definição decorre que:

$a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$, $a^4 = a \cdot a \cdot a \cdot a$, etc.

Exemplos:

$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ $\quad (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$

Definição especial

Sendo dado um número real a, convencionaremos que $a^1 = a$ e que $a^0 = 1$ (nesse caso $a \neq 0$).

Vejamos alguns exemplos:

$0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0$ $\quad 3^1 = 3$ $\quad (-2)^1 = -2$ $\quad 4^0 = 1$ $\quad (-7)^0 = 1$

Propriedades

Sendo a e b reais e m e n naturais, valem as seguintes propriedades:

$[P_1]$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$[P_2]$ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (ressalvas: $a \neq 0$ e $m \geqslant n$)

$[P_3]$ $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$[P_4]$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (ressalva: $b \neq 0$)

$[P_5]$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exercícios

1 Calcule:

a) $(-4)^2$ c) $-(-2)^4$ e) $(-1)^{21}$

b) -4^2 d) $\left(\frac{2}{3}\right)^0$ f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2$

2 Calcule o valor da expressão $E = \dfrac{\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3}{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 : (-4)}$.

3 Qual é o valor de:

a) $3^{2^3} - (3^2)^3$? b) $(10^0 + 10^1 + 10^2)^2$? c) $\dfrac{(7^5)^3 : (7^3)^2}{(1 + 2 \cdot 3)^5}$?

2 Potência de expoente inteiro negativo

Definição

Dados um número real a, não nulo, e um número n natural, chama-se *potência de base* $\boldsymbol{a}$ *e expoente* $\boldsymbol{-n}$ o número a^{-n}, que é o inverso de a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Vejamos alguns casos:

$3^{-1} = \frac{1}{3^1} = \frac{1}{3}$ $\quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $\quad 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

$(-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$ $\quad \left(-\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{-\frac{1}{64}} = -64$

Exemplo 1

Calculemos o valor de $E = [10^{-2} + (-10)^{-1}]^{-1}$.
Temos:

$$E = \left[\frac{1}{10^2} + \frac{1}{(-10)}\right]^{-1} = \left[\frac{1}{100} - \frac{1}{10}\right]^{-1} = \left(-\frac{9}{100}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{9}{100}} = -\frac{100}{9}$$

Propriedades

Com essa definição para potência de expoente inteiro negativo, todas as cinco propriedades, P_1 a P_5, enunciadas anteriormente continuam válidas para quaisquer expoentes m e n inteiros (positivos ou negativos).

Exemplo 2

Supondo $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vamos simplificar a expressão $E = \dfrac{a^{-1} \cdot (b^2)^3 \cdot (a^5)^4}{(b^{-2})^2 \cdot (a^2)^{-3}}$.

Temos:

$$E = \frac{a^{-1} \cdot b^6 \cdot a^{20}}{b^{-4} \cdot a^{-6}} = \frac{b^6 \cdot a^{19}}{b^{-4} \cdot a^{-6}} = \left(\frac{b^6}{b^{-4}}\right) \cdot \left(\frac{a^{19}}{a^{-6}}\right) = b^{10} \cdot a^{25}$$

Exercícios

4 Calcule:

a) 2^{-3}

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

c) $(-5)^{-3}$

d) $(0, 1)^{-2}$

e) 3^{-3}

f) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

5 Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

a) $\left[\dfrac{2^{-1} - (-2)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}}\right]^{-2}$

b) $\dfrac{3 \cdot 2^{-2} - 2 \cdot 3^{-2}}{(3 \cdot 2)^{-2}}$

c) $\dfrac{3^{x+2} - 3^{x+1}}{3^x}$

6 (Cefet-MG) Sabendo que $A = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ e $B = \dfrac{3^x - 3^{-x}}{2}$, qual é o valor de $A^2 - B^2$?

7 (UC-GO) Simplifique a expressão $\dfrac{2^{n+4} + 2^{n+2} + 2^{n-1}}{2^{n-2} + 2^{n-1}}$.

8 Sendo $a > 0$, resolva a inequação $\dfrac{a^{n+2} + a^{n+1} + a^n}{(2a^n)^2} \geqslant \dfrac{1}{a^n}$.

3 ○ Raiz n-ésima (enésima) aritmética

Definição

Dados um número real não negativo a e um número natural n, $n \geqslant 1$, chama-se *raiz enésima aritmética de* a o número real e não negativo b tal que $b^n = a$.

O símbolo $\sqrt[n]{a}$, chamado *radical*, indica a raiz enésima aritmética de a. Nele, a é chamado *radicando*, e n, *índice*.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b \geqslant 0 \quad \text{e} \quad b^n = a$$

Vejamos alguns exemplos:

1. $\sqrt[2]{9} = 3$, pois $3^2 = 9$.
2. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$.
3. $\sqrt[5]{0} = 0$, pois $0^5 = 0$.
4. $\sqrt[4]{625} = 5$, pois $5^4 = 625$.

Propriedades

Sendo a e b reais não negativos, m inteiro e n e p naturais maiores ou iguais a 2, valem as seguintes propriedades:

$[R_1]$ $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

$[R_2]$ $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$[R_3]$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$

$[R_4]$ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$

$[R_5]$ $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[pn]{a}$

Exemplo 3

Vamos simplificar as expressões:

a) $\sqrt{27} + \sqrt{12}$ b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{243\,ab^4}$ $(a \geq 0$ e $b \geq 0)$

Temos:

a) $\sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{3^3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} + \sqrt{2^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{243\,ab^4} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{3^5\,ab^4} = \sqrt{3^5 \cdot a^2b^4} = \sqrt{3^4 \cdot 3 \cdot a^2b^4} = 3^2ab^2\sqrt{3} = 9ab^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}ab^2$

Exemplo 4

Vamos racionalizar os denominadores das frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{6}{\sqrt{3}+1}$

Temos:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{6}{\sqrt{3}+1} = \frac{6}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{6(\sqrt{3}-1)}{2} = 3(\sqrt{3}-1)$

Exercícios

9 Calcule o valor de:

a) $x = \sqrt{100 - 36}$ b) $y = \sqrt[3]{1 + \sqrt{49}}$ c) $z = \sqrt[5]{-1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt[3]{1}}}}$

10 Simplifique:

a) $\sqrt{72} + \sqrt{18} - 2 \cdot \sqrt{50}$ b) $\frac{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{125}}$ c) $\sqrt{48} - \sqrt{45} + \sqrt{12}$

11 Coloque em ordem crescente: $\sqrt{5}$, $\sqrt[4]{2}$, $\sqrt[3]{6}$ e 1.

12 Efetue:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{21}$

b) $\sqrt[4]{32} : \sqrt[4]{2}$

c) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

d) $\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt[6]{2}}$

13 Efetue, usando produtos notáveis:

a) $(1 + \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

c) $(\sqrt{10} + 1) \cdot (\sqrt{10} - 1)$

d) $(\sqrt{2} + 2)^3$

14 Efetue:

a) $\sqrt{8 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt{8 - \sqrt{15}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{12} + 2} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{12} - 2}$

15 Calcule:

a) $\sqrt{\sqrt{81}}$ b) $\sqrt{4 \cdot \sqrt{2}}$ c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}}$

16 Racionalize o denominador de cada uma das seguintes frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$ d) $\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

17 Racionalize o denominador de cada uma das seguintes frações:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ b) $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ d) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

18 (Unifor-CE) Simplifique a expressão $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{2}-1}$.

19 (Cefet-MG) Qual é o valor da expressão $(\sqrt{2})^{-2} + (\sqrt{3})^{-2} + (\sqrt{6})^{-2}$?

20 (UF-MS) Calcule: $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - \left(\frac{-2}{3}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)^{2}}$.

4 Potência de expoente racional

Definição

Dados um número real a (positivo), um número inteiro p e um número natural q ($q \geqslant 1$), chama-se *potência de base* $\boldsymbol{a}$ *e expoente* $\frac{\boldsymbol{p}}{\boldsymbol{q}}$ a raiz q-ésima aritmética de a^p.

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Vejamos alguns exemplos:

$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{5}$ $\quad 4^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ $\quad 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^{-\frac{5}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{2}{5}\right)^{-5}} = \sqrt[2]{\frac{3125}{32}}$ $\quad 2^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{2^3}$

Definição especial

Sendo $\frac{p}{q} > 0$, define-se $0^{\frac{p}{q}} = 0$.

Propriedades

Sendo a e b reais positivos e $\frac{p}{q}$ e $\frac{r}{s}$ racionais, valem as seguintes propriedades:

$[P_1]$ $a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$ $\quad [P_3]$ $(a \cdot b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} \cdot b^{\frac{p}{q}}$ $\quad [P_5]$ $\left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}}$

$[P_2]$ $a^{\frac{p}{q}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$ $\quad [P_4]$ $(a : b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}} : b^{\frac{p}{q}}$

Exemplo 5

Vamos calcular o valor de $y = 8^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}}$.

Solução (a) — escrevemos as potências na forma de raízes.

$$y = \sqrt[3]{8^2} + \sqrt[4]{81} = \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{81} = 4 + 3 = 7$$

Solução (b) — usamos as propriedades das potências.

$$y = (2^3)^{\frac{2}{3}} + (3^4)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{6}{3}} + 3^{\frac{4}{4}} = 2^2 + 3^1 = 7$$

Exercícios

21 Simplifique as seguintes potências de expoente racional:

a) $9^{\frac{3}{2}}$ b) $8^{\frac{4}{3}}$ c) $64^{-\frac{2}{3}}$ d) $81^{-0,25}$ e) $1000^{0,666...}$

22 (Unimes-SP) Qual é o valor de: "A metade de 2^{22} multiplicada por $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{4^{0,5}}$"?

23 (Vunesp-SP) Uma fórmula matemática para se calcular aproximadamente a área, em metros quadrados, da superfície corporal de uma pessoa, é dada por:

$$S(p) = \frac{11}{100} p^{\frac{2}{3}},$$

em que p é a massa da pessoa em quilogramas.
Considere uma criança de 8 kg. Determine:

a) a área da superfície corporal da criança;
b) a massa que a criança terá quando a área de sua superfície corporal duplicar. (Use a aproximação $\sqrt{2} = 1,4$.)

5 ○ Função exponencial

Introdução

© Photodisc

Um boato se espalha da seguinte maneira:

1º dia: duas pessoas ficam sabendo do boato.
2º dia: cada uma dessas 2 pessoas conta o boato para outras 2 pessoas.
3º dia: cada uma das 4 pessoas que ficaram sabendo do boato conta para outras 2 novas pessoas,

e assim por diante.

Enfim, para um certo dia x, há um número f(x) de pessoas que tomaram conhecimento dele naquele dia. O valor de f(x), portanto, é uma função de x, e a lei que expressa f(x) em função de x é $f(x) = 2^x$, que é um caso particular de *função exponencial*.

Definição

Chama-se *função exponencial* qualquer função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ dada por uma lei da forma $f(x) = a^x$, em que a é um número real dado, $a > 0$ e $a \neq 1$.

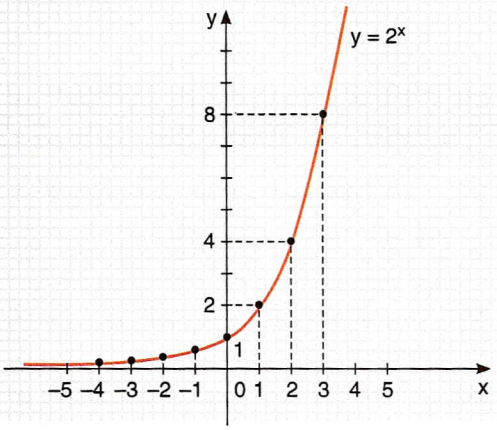
Gráfico

Vamos construir os gráficos de algumas funções exponenciais e observar algumas propriedades.

Exemplo 6

Vejamos como construir o gráfico da função $y = 2^x$.
Vamos usar o método de localizar alguns pontos do gráfico e ligá-los.

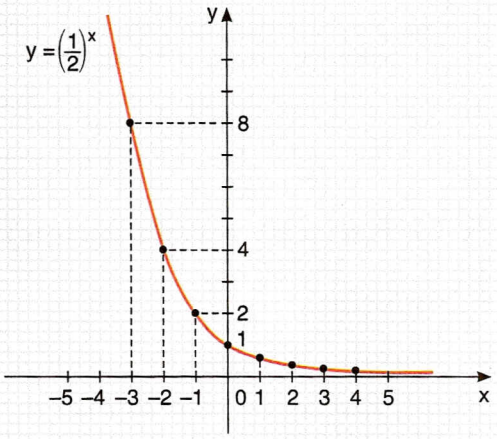
x	y
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Exemplo 7

Vamos construir o gráfico da função $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	y
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



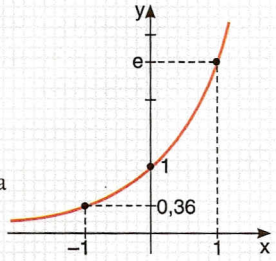
Exemplo 8

Um importante número irracional, que é estudado em Cálculo Diferencial e Integral, é indicado pela letra *e*. Para compreendê-lo, consideremos a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ em que $x \in \mathbb{R}$ e vejamos alguns valores que ela assume quando x se "aproxima" de zero:

x	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1 + x)^{\frac{1}{x}}$	2,594	2,705	2,717	2,7182	2,7183

À medida que x se torna menor, a expressão $(1 + x)^{\frac{1}{x}}$ fica cada vez mais próxima do número e ≅ 2,7183.

O gráfico da função $y = e^x$ está representado ao lado.



Muitas calculadoras científicas e financeiras possuem a tecla e^x; dessa forma, em geral, não é necessário substituir e pela aproximação dada acima, bastando teclar o expoente x para se conhecer o resultado da potência e^x.

Veja:

Marco A. Fontes Sá/Kino

- Para calcular e^2, teclamos:

$$2 \rightarrow e^x \rightarrow 7{,}389$$

Obtemos 7,389.

- Para calcular e^{10}, teclamos:

$$10 \rightarrow e^x \rightarrow 22\,026{,}46$$

Obtemos 22 026,46.

É muito importante destacar que as calculadoras científicas também nos auxiliam no cálculo de potências cujas contas são muito trabalhosas.

Agora observe a tecla y^x.

Nela, y representa a base da potência e x, seu expoente.

- Para calcular $1{,}3^5$, teclamos:

$$1{,}3 \rightarrow y^x \rightarrow 5 \rightarrow 3{,}712$$

Obtemos 3,712.

- Para calcular $2{,}3^8$, teclamos:

$$2{,}3 \rightarrow y^x \rightarrow 8 \rightarrow 783{,}109$$

Obtemos 783,109.

Cabe ressaltar que existem muitos modelos de calculadora e, em alguns casos, uma ou outra das operações anteriores poderá ser invertida.

De qualquer modo, muitas operações com potências podem ser simplificadas com o auxílio da calculadora. Em alguns problemas deste capítulo você precisará usá-la.

Propriedades

1ª) Na função exponencial $y = a^x$, temos:

$$x = 0 \Rightarrow y = a^0 = 1,$$

ou seja, o par ordenado (0, 1) satisfaz a lei $y = a^x$ para todo a ($a > 0$ e $a \neq 1$). Isso quer dizer que o gráfico de qualquer função exponencial corta o eixo dos y no ponto de ordenada 1.

2ª) Se $a > 1$, então a função $f(x) = a^x$ é crescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ então } \overbrace{a^{x_1} < a^{x_2}}^{\text{sinais iguais}}$$

São crescentes, por exemplo, as funções exponenciais $f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$, $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, $f(x) = (1{,}2)^x$ e $f(x) = e^x$.

3ª) Se $0 < a < 1$, então a função $f(x) = a^x$ é decrescente. Portanto, dados os reais x_1 e x_2, temos:

$$\text{se } x_1 < x_2, \text{ então } \overbrace{a^{x_1} > a^{x_2}}^{\text{sinais opostos}}$$

São decrescentes, por exemplo, as funções exponenciais $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e $f(x) = (0{,}1)^x$.

4ª) Para todo $a > 0$ e $a \neq 1$, temos:

$$\text{se } a^{x_1} = a^{x_2}, \quad \text{então} \quad x_1 = x_2$$

5ª) Para todo $a > 0$ e todo x real, temos $a^x > 0$; portanto, o gráfico da função $y = a^x$ está sempre acima do eixo dos x.
Se $a > 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores negativos cada vez menores.
Se $0 < a < 1$, então a^x aproxima-se de zero quando x assume valores positivos cada vez maiores. Tudo isso pode ser resumido dizendo-se que o conjunto imagem da função exponencial $y = a^x$ é $\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 0\} = \mathbb{R}_+^*$.

Exercícios

24 Construa os gráficos das seguintes funções exponenciais:

a) $f(x) = 3^x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

c) $f(x) = 2^{1-x}$

25 Construa o gráfico de cada uma das seguintes funções e determine o conjunto imagem:

a) $f(x) = 2^x - 3$

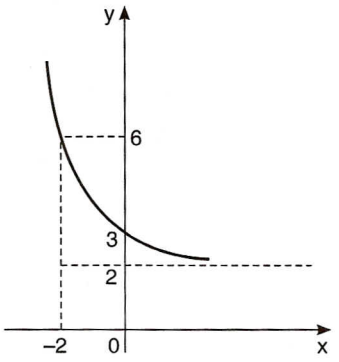
b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

c) $f(x) = 2 \cdot 2^x + 1$

d) $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

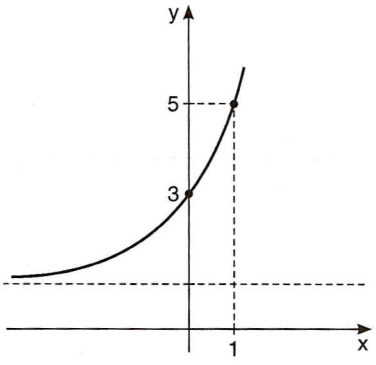
(Sugestão: volte aos desafios do capítulo 2.)

26 (U. F. Ouro Preto-MG) Seja f a função dada por $f(x) = p \cdot 2^{-x} + q$, cujo gráfico está representado na figura ao lado.



Determine p e q.

27 O gráfico ao lado representa a função f cuja lei é $f(x) = a + b \cdot 2^x$, sendo a e b constantes positivas.



a) Determine a e b
b) Qual é o conjunto imagem de f?
c) Calcule $f(-2)$

28 (UF-PI) Utilizando um microscópio, um técnico constatou que cada célula de uma bactéria subdivide-se em duas ao final de 20 minutos. Ao final de dez horas, qual será o total de células produzidas a partir de uma célula?

29 (FGV-SP) Curva de Aprendizagem é um conceito criado por psicólogos que constataram a relação existente entre a eficiência de um indivíduo e a quantidade de treinamento ou experiência possuída por este indivíduo. Um exemplo de Curva de Aprendizagem é dado pela expressão

$$Q = 700 - 400e^{-0,5t}, \text{ em que}$$

Q = quantidade de peças produzidas mensalmente por um funcionário;
t = meses de experiência;
e = 2,7183.

a) De acordo com essa expressão, quantas peças um funcionário com 2 meses de experiência deverá produzir mensalmente?

b) E um funcionário sem qualquer experiência, quantas peças deverá produzir mensalmente? Compare esse resultado com o resultado do item *a*. Há coerência entre eles?

30 Meia-vida ou período de semidesintegração é o tempo necessário para a desintegração de metade dos átomos radioativos (ou metade da massa) de um certo isótopo de um elemento químico. A Química nos ensina que, na verdade, a massa desse isótopo não está sumindo: apenas está diminuindo pelo fato de o isótopo se transformar em outro isótopo.
O cobalto 60, Co_{27}^{60}, tem meia-vida de 5 anos. Ele é usado em hospitais na radioterapia, para tratamento de pacientes com câncer. A partir de uma amostra de 10 g do cobalto 60, determine:

a) A massa de isótopo daqui a 5 anos e daqui a 10 anos.

b) Seja x o *número de meias-vidas*. Encontre a lei que relaciona a massa m da amostra em função de x e esboce o gráfico dessa função.

c) Determine, a partir da lei, a massa desse isótopo daqui a 25 anos e daqui a 1 século.

31 (UF-PR) Duas populações, designadas por F e G, têm os respectivos crescimentos expressos por $f(t) = 36 + t^2$ e $g(t) = 10(2^t)$, sendo t número não negativo que representa o tempo em meses.
Então, analise as seguintes afirmações:

a) A população G duplica a cada mês.

b) $g(51) - g(50) = g(50)$

c) Quando $t = 1$, a população F é menor do que a população G.

d) Em nenhum tempo a população F será igual à população G.

Equações exponenciais

Uma equação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência.

São exponenciais, por exemplo, as equações $2^x = 16$, $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 81$ e $4^x - 2^x = 12$.

Um método usado para resolver equações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da equação a potências de mesma base a ($0 < a \neq 1$), e daí aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

Quando isso é possível, a equação exponencial é facilmente resolvida. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 9

Vamos resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $2^x = 32$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$ c) $(\sqrt{2})^x = 16$

Temos:

a) $2^x = 32 \Rightarrow 2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow S = \{5\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 \Rightarrow (3^{-1})^x = 3^3 \Rightarrow 3^{-x} = 3^3 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{-3\}$

c) $(\sqrt{2})^x = 16 \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x = 2^4 \Rightarrow \frac{x}{2} = 4 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow S = \{8\}$

Exemplo 10

Vamos resolver a seguinte equação em $\mathbb{R}$: $3^{2x+1} \cdot 9^{3x+1} = 27^{x-1}$

$$3^{2x+1} \cdot 9^{3x+1} = 27^{x-1} \Rightarrow 3^{2x+1} \cdot (3^2)^{3x+1} = (3^3)^{x-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^{2x+1} \cdot 3^{6x+2} = 3^{3x-3} \Rightarrow 3^{8x+3} = 3^{3x-3} \Rightarrow 8x + 3 = 3x - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = -\frac{6}{5} \Rightarrow S = \left\{-\frac{6}{5}\right\}$$

Exemplo 11

Vamos resolver as seguintes equações em $\mathbb{R}$:

a) $9^x + 3^x = 12$ b) $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224$

a) $9^x + 3^x = 12 \Rightarrow (3^2)^x + 3^x = 12 \Rightarrow 3^{2x} + 3^x = 12$

Chamando 3^x de y, vem:

$$y^2 + y = 12 \Rightarrow y^2 + y - 12 = 0 \Rightarrow y = 3 \text{ ou } y = -4$$

Como $y = 3^x$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} 3^x = 3 \Rightarrow 3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1 \\ \text{ou} \\ 3^x = -4 \Rightarrow \nexists\, x \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{1\}$$

b) $4^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224 \Rightarrow (2^2)^{x+1} - 4 \cdot 2^x = 224 \Rightarrow 2^{2x+2} - 4 \cdot 2^x = 224$
$\Rightarrow 2^{2x} \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^x = 224 \Rightarrow 4 \cdot 2^{2x} - 4 \cdot 2^x = 224$

Chamando 2^x de y, vem:

$$4 \cdot y^2 - 4 \cdot y = 224 \Rightarrow y^2 - y - 56 = 0 \Rightarrow y = 8 \text{ ou } y = -7$$

Como $y = 2^x$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3 \\ \text{ou} \\ 2^x = -7 \Rightarrow \nexists\, x \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{3\}$$

Exercícios

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $2^x = 32$ b) $5^x = 125$ c) $2^x = \frac{1}{8}$ d) $4^x = \frac{1}{32}$ e) $8^x = 0{,}125$

33 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^x = \sqrt[3]{9}$

b) $\frac{1}{e^2} = e^{x-3}$

c) $8^{2x+1} = \sqrt[3]{4^{x-1}}$

d) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

e) $0{,}64^{x+1} = 1{,}25^{-x+3}$

34 (UF-PA) Uma reserva florestal possui 10 000 árvores. Determine em quantos anos a quantidade de árvores estará reduzida à oitava parte, se a função que representa a quantidade de árvores por ano é $y(t) = 10\,000 \cdot 2^{-t}$.

35 Uma imobiliária acredita que o valor v de um imóvel no litoral varia segundo a lei $v(t) = 60000 \cdot (0{,}9)^t$, em que t é o número de anos contados a partir de hoje.

a) Qual é o valor atual desse imóvel?
b) Qual é a desvalorização percentual anual desse imóvel?
c) Quanto valerá esse imóvel daqui a 2 anos?
d) Daqui a quantos anos o imóvel valerá R$ 35429,40? (Dado: $9^5 = 59049$.)

Observação: Se desejar, use a calculadora.

36 Um dos produtos liberados nos acidentes em usinas nucleares é o isótopo do estrôncio 90, Sr^{90}, cuja meia-vida é de 28 anos. Se uma explosão nuclear liberou 30 g desse isótopo, determine:

a) a massa desse isótopo 84 anos após essa explosão;
b) o tempo necessário para que a massa desse isótopo seja de $15 \cdot 2^{-7}$ g.

Observação: Se desejar, use a calculadora.

37 Uma maionese malconservada causou mal-estar nos freqüentadores de um clube. Uma investigação revelou a presença da bactéria salmonela, que se multiplica segundo a lei:

$$n(t) = 200 \cdot 2^{at},$$

em que n(t) é o número de bactérias encontradas na amostra de maionese t horas após o início do almoço e a é uma constante real.

a) Determine o número inicial de bactérias.
b) Sabendo que após 3 horas do início do almoço o número de bactérias era de 800, determine o valor da constante a.
c) Determine o número de bactérias após 1 dia da realização do almoço (use $2^{10} \sim 10^3$).

38 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações exponenciais:

a) $2^{3x-1} \cdot 4^{2x+3} = 8^{3-x}$
b) $2^{3x+2} : 8^{2x-7} = 4^{x-1}$
c) $(3^{2x-7})^3 : 9^{x+1} = (3^{3x-1})^4$
d) $10^{3x} : 0{,}01^{-x+4} = 1$

39 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2^{x+1} + 2^x - 2^{x-2} = 44$
b) $4^x - 2^x = 2$
c) $2^{x+1} + 2^{x-2} - \frac{3}{2^{x-1}} = \frac{30}{2^x}$
d) $3^{-x} + 3^{x+1} = \frac{28}{3}$

40 (UF-SC) Qual é o valor de x que satisfaz a equação $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$?

41 Resolva, em $\mathbb{R}$, os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} 5^{x+y} = \frac{1}{5} \\ 7^{2x+y} - 7 = 0 \end{cases}$
b) $\begin{cases} 10^{-x} \cdot 10^{2y} = 10^5 \\ 4^{5x} : 8^{y-x} = 16 \end{cases}$
c) $\begin{cases} 5^x + 5^{y+1} = 26 \\ e^x \cdot e^{2y} = 1 \end{cases}$, com x e y inteiros

42 (PUC-PR) Resolva a equação: $3^{2x+3} - 3^{2x+2} + 2 \cdot 3^{2x} = 2^{2x+5} - 2^{2x+1}$.

Inequações exponenciais

Uma inequação exponencial é aquela que apresenta a incógnita no expoente de pelo menos uma potência.

São exponenciais, por exemplo, as inequações $2^x > 64$, $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 27$ e $4^x - 2^x \leqslant 12$.

Um método usado para resolver inequações exponenciais consiste em reduzir ambos os membros da inequação a potências de mesma base a $(0 < a \neq 1)$, e daí aplicar a propriedade:

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 < x_2 \text{ (se } a > 1)$$

ou

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Rightarrow x_1 > x_2 \text{ (se } 0 < a < 1)$$

Exemplo 12

Vamos resolver as seguintes inequações em $\mathbb{R}$:

a) $2^x > 64$ b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$ c) $(\sqrt{2})^x \geq 8\sqrt{2}$ d) $(0,7)^{2x-1} > 1$

a) $2^x > 64 \Rightarrow 2^x > 2^6 \Rightarrow x > 6 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27 \Rightarrow (3^{-1})^x \leq 3^3 \Rightarrow 3^{-x} \leq 3^3 \Rightarrow -x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$

c) $(\sqrt{2})^x \geq 8\sqrt{2} \Rightarrow \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^x \geq 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{\frac{x}{2}} \geq 2^{\frac{7}{2}} \Rightarrow \frac{x}{2} \geq \frac{7}{2} \Rightarrow x \geq 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 7\}$

d) $(0,7)^{2x-1} > 1 \Rightarrow (0,7)^{2x-1} > (0,7)^0 \Rightarrow 2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\right\}$

Exemplo 13

Vamos resolver a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

$$(5^{-x})^{3x+1} \cdot 25^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{125}\right)^{x-1}$$

$$(5^{-x})^{3x+1} \cdot 25^{1+2x-x^2} \geq \left(\frac{1}{125}\right)^{x-1} \Rightarrow 5^{-3x^2-x} \cdot 5^{2+4x-2x^2} \geq 5^{-3x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5^{-5x^2+3x+2} \geq 5^{-3x+3} \Rightarrow -5x^2 + 3x + 2 \geq -3x + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 6x + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{5} \leq x \leq 1 \Rightarrow S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{5} \leq x \leq 1\right\}$$

Exemplo 14

Vamos resolver a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

$$7^x - 6 \geq 7^{1-x}$$

$$7^x - 6 \geq 7^{1-x} \Rightarrow 7^x - 6 \geq \frac{7}{7^x} \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x \geq 7 \Rightarrow 7^{2x} - 6 \cdot 7^x - 7 \geq 0$$

Fazendo $7^x = y$, vem:

$$y^2 - 6 \cdot y - 7 \geq 0 \Rightarrow y \leq -1 \text{ ou } y \geq 7$$

Logo, como $7^x = y$:

$$\left.\begin{array}{l} 7^x \leq -1 \Rightarrow \nexists\, x \\ \text{ou} \\ 7^x \geq 7 \Rightarrow 7^x \geq 7^1 \Rightarrow x \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

43 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^x < 32$

b) $3^x > 243$

c) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{81}$

d) $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 125$

e) $5^x < -1$

f) $\left(\frac{2}{5}\right)^x > \frac{5}{2}$

44 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $(\sqrt[3]{3})^x \leq \frac{1}{9}$

b) $(0{,}01)^x \leq \frac{1}{\sqrt{1000}}$

c) $4^x \geq 8$

d) $(0{,}8)^x > \frac{5}{4}$

e) $e^{4x+1} > \frac{1}{e}$

f) $0{,}3^{x+2} \geq \frac{100}{9}$

45 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações exponenciais:

a) $2^{x^2-x} \leq 64$

b) $\left(\frac{1}{e}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{e}\right)^4$

c) $(27^{x-2})^{x+1} \geq (9^{x+1})^{x-3}$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-3} > 1$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+3} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{2x-1}$

46 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes desigualdades:

a) $2^{x-1} + 2^x + 2^{x+1} - 2^{x+2} + 2^{x+3} > 240$

b) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$

c) $e^{2x} - e^{x+1} - e^x + e < 0$

47 A lei seguinte representa o crescimento do número de pessoas infectadas por uma gripe, em uma certa metrópole: $N(t) = a \cdot 2^{bt}$, em que $N(t)$ é o número de pessoas infectadas t dias após a realização desse estudo e a e b são constantes reais. Sabendo que no dia em que se iniciou o estudo já havia 3000 pessoas infectadas e que, após 2 dias, esse número já era de 24000 pessoas, determine:

a) Os valores das constantes a e b.

b) O número de infectados pela gripe após 16 horas do início dos estudos.

c) O número mínimo de dias necessários para que o número de infectados ultrapasse 3 milhões. Use a aproximação $2^{10} \sim 10^3$.

48 (U. F. Viçosa-MG) Sabendo que $2^a \cdot x^2 + 4^{a+1} \cdot x + 8 > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, determine o intervalo de variação do parâmetro a.

49 Considere a equação de 2º grau, na variável x:

$$x^2 + 2^t \cdot x + 8^{-t+3} = 0$$

a) Verifique que, para $t = 0$, a equação não tem raízes reais.

b) Qual é o *menor* valor natural de t para o qual essa equação admite duas raízes reais e distintas?

Testes de vestibulares

1 (Fuvest-SP) $\sqrt[3]{\dfrac{2^{28} + 2^{30}}{10}} =$

a) $\dfrac{2^8}{5}$ c) 2^8 e) $\left(\dfrac{2^{58}}{10}\right)^{\frac{1}{3}}$

b) $\dfrac{2^9}{5}$ d) 2^9

2 (Umesp-SP) Simplificando a expressão abaixo,

$$\frac{1}{2}\left[(0{,}5)^{-4} + \sqrt[5]{\frac{1}{32}}\right]^{-1}$$

obtemos:

a) $\dfrac{1}{33}$ c) $\dfrac{8}{9}$ e) $\dfrac{33}{4}$

b) $\dfrac{9}{32}$ d) $\dfrac{8}{7}$

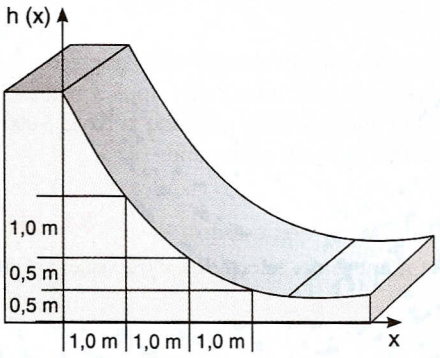
3 (Mackenzie-SP) Se $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{10}{3}$, então $a + a^{-1}$ vale:

a) $\dfrac{82}{9}$ d) $\dfrac{100}{9}$

b) $\dfrac{100}{82}$ e) $\dfrac{82}{3}$

c) $\dfrac{16}{9}$

4 (Cefet-PR) Uma rampa para manobras de *skate* é representada pelo esquema:



Se a parte curva pudesse ser associada a uma função, essa função seria:

a) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 3$ d) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + 2$

b) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+1} + \dfrac{5}{2}$ e) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} + 1$

c) $h(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2}$

5 (Unirio-RJ) Segundo dados de uma pesquisa, a população de certa região do país vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, aproximadamente, segundo a relação:

$$P(t) = P(0) \cdot 2^{-0{,}25t}$$

Sendo P(0) uma constante que representa a população inicial dessa região e P(t) a população t anos após, determine quantos anos decorrerão para que essa população fique reduzida à quarta parte da inicial.

a) 6 d) 12

b) 8 e) 15

c) 10

6 (Cefet-MG) A solução, em $\mathbb{R}$, da equação $16^x \cdot 4^{x+3} - 8^{x+2} = 0$ é:

a) 0 d) 3

b) 1 e) 6

c) 2

7 (Unimes-SP) O número real a satisfaz a sentença $3^{2x-1} < \dfrac{1}{9^{x+1}}$ se, e somente se:

a) $a < -4$ d) $-\dfrac{1}{4} < a < 0$

b) $-4 \leqslant a < -1$ e) $a > 4$

c) $a < -\dfrac{1}{4}$

8 (Fafi-MG) O valor de $\dfrac{21^{30}}{63^{15}}$ é:

a) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{15}$ c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

b) 7^{15} d) 3^{15}

9 (Fuvest-SP) Seja $f(x) = 2^{2x+1}$. Se a e b são tais que $f(a) = 4f(b)$, pode-se afirmar que:

a) $a + b = 2$ d) $a - b = 2$

b) $a + b = 1$ e) $a - b = 1$

c) $a - b = 3$

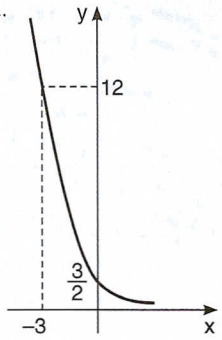
10 (UF-SE) Dado que $6^{3x} = 64$, o valor de 6^{-x} é:

a) 6 d) $\dfrac{1}{4}$

b) 4 e) $\dfrac{1}{6}$

c) $\dfrac{1}{2}$

11 (UF-MG) Observe a figura. Nessa figura, está representado o gráfico de $f(x) = ka^x$, sendo k e a constantes positivas. O valor de f(2) é:



a) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{1}{2}$ d) 1

12 (FACS-BA) O domínio da função $g(x) = \sqrt{2^{2x+3} - 2^{x^2}}$ é:

a) $]-\infty, -1]$ d) $]-3, 1[$

b) $[3, +\infty[$ e) $[-1, 3]$

c) $]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[$

13 (UF-SE) A expressão $P(n) = 40 - 40 \cdot 2^{-0,34n}$ permite calcular o número de artigos que um operário recém-contratado é capaz de produzir diariamente, após n dias de treinamento. Para que esse operário produza pelo menos 30 artigos por dia, o menor valor inteiro de n é:

a) 2 c) 4 e) 6

b) 3 d) 5

14 (U. F. Santa Maria-RS) A solução da equação exponencial $5^x (5^x - 1) = 20$:

a) pertence ao intervalo $(-\infty, -3[$.

b) pertence ao intervalo $]4, +\infty)$.

c) pertence ao intervalo $]0, 2[$.

d) é um número par.

e) é um número irracional.

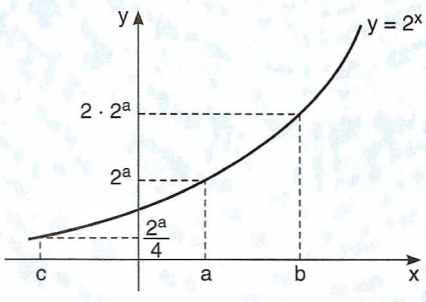
15 (Fund. Visconde de Cairu-BA) A soma das raízes da equação $4 \cdot 2^{2x-2} - 40 \cdot 2^{x-1} + 64 = 0$ é igual a:

a) 8 d) –16

b) 6 e) –20

c) 2

16 (UF-RN) No plano cartesiano abaixo, estão representados o gráfico da função $y = 2^x$, os números a, b, c e suas imagens.



Observando-se a figura, pode-se concluir que, *em função de a*, os valores de b e c são, respectivamente:

a) $\frac{a}{2}$ e $4a$ c) $2a$ e $\frac{a}{4}$

b) $a - 1$ e $a + 2$ d) $a + 1$ e $a - 2$

17 (PUC-MG) Se $f(x) = 4^{x+1}$ e $g(x) = 4^x$, a solução da inequação $f(x) > g(2 - x)$ é:

a) $x > 0$ d) $x > 1,5$

b) $x > 0,5$ e) $x > 2$

c) $x > 1$

18 (Cefet-MG) O conjunto solução da inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} \leq \left(\frac{1}{4}\right)$ é:

a) $(-\infty, 5]$ d) $[4, +\infty)$

b) $[5, +\infty)$ e) $(-\infty, -5]$

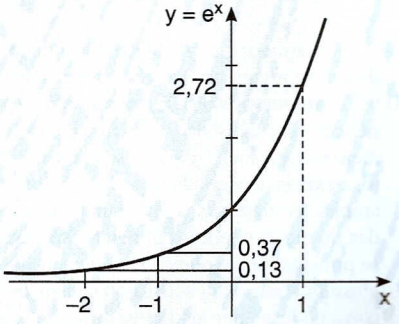
c) $[-5, +\infty)$

19 (PUC-RS) O produto das raízes da equação $\sqrt{4^{x+1} \cdot \sqrt{16^x}} = \frac{1}{8^{x^2-2}}$ é:

a) –5 c) $-\frac{5}{3}$ e) $\frac{5}{3}$

b) –2 d) 0

20 (UE-RJ) Uma empresa acompanha a produção diária de um funcionário recém-admitido, utilizando uma função f(d), cujo valor corresponde ao número mínimo de peças que a empresa espera que ele produza em cada dia (d), a partir da data de sua admissão.
Considere o gráfico auxiliar abaixo, que representa a função $y = e^x$.



Utilizando $f(d) = 100 - 100 \cdot e^{-0,2d}$ e o gráfico acima, a empresa pode prever que o funcionário alcançará a produção de 87 peças num mesmo dia, quando d for igual a:

a) 5

b) 10

c) 15

d) 20

21 (Ucsal-BA) A equação $5^x + 5^{-x} = m$ admite raízes reais se, e somente se, o número real m satisfizer à condição:

a) $m < 0$
b) $-2 < m < 2$
c) $0 < m < 2$
d) $m \geq 2$
e) $m < -2$ ou $m > 2$

22 (ITA-SP) A soma das raízes reais positivas da equação $4^{x^2} - 5 \cdot 2^{x^2} + 4 = 0$ vale:

a) 2
b) 5
c) $\sqrt{2}$
d) 1
e) $\sqrt{3}$

23 (UE-RJ) Pelos programas de controle de tuberculose, sabe-se que o risco de infecção R depende do tempo t, em anos, do seguinte modo: $R = R_0 e^{-kt}$, em que R_0 é o risco de infecção no início da contagem do tempo t e k é o coeficiente de declínio.

O risco de infecção atual em Salvador foi estimado em 2%. Suponha que, com a implantação de um programa nessa cidade, fosse obtida uma redução no risco de 10% ao ano, isto é, k = 10%. Use a tabela abaixo para os cálculos necessários:

e^x	8,2	9,0	10,0	11,0	12,2
x	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5

O tempo, em anos, para que o risco de infecção se torne igual a 0,2%, é de:

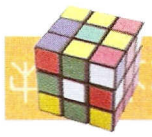
a) 21
b) 22
c) 23
d) 24

24 (UMC-SP) O tempo de circulação do sangue (em segundos) de um mamífero (o tempo médio que todo o sangue leva para circular uma vez e voltar ao coração) é proporcional à raiz quarta do "peso" do corpo do mamífero, isto é:

$$T(M) = K \cdot M^{\frac{1}{4}}$$

Para um elefante cujo "peso" é de 5184 quilos o tempo foi estimado em 150 segundos. Pode-se afirmar que:

a) a constante de proporcionalidade deve ser 30.
b) um mamífero de 64 quilos tem o tempo de circulação superior a 1 minuto.
c) um elefante de 1024 quilos tem o tempo de circulação igual a 100 segundos.
d) a constante de proporcionalidade deve ser 40.
e) um mamífero de 2500 quilos tem o tempo de circulação superior a 150 segundos.



Desafios

1

Medicamento mais barato não chega à população de menor poder aquisitivo

A entrada dos medicamentos genéricos no Brasil é um sucesso. Há um ano e meio no mercado, a venda desses remédios cresce exponencialmente, em torno de 15% ao mês.

Apesar do bom desempenho, os genéricos têm causado certa frustração no meio empresarial. Antes de seu lançamento, a expectativa era de que eles pudessem ampliar o mercado, aumentando as vendas de medicamentos em geral. Esperava-se principalmente que os genéricos conseguissem atrair, com seus preços menores, consumidores que não costumavam comprar remédios. O que ocorreu até agora, no entanto, foi simplesmente uma substituição de um tipo de produto por outro. Quem já comprava o produto de marca, economiza com o genérico. Quem não comprava, continuou fora do mercado.

Nelson Toledo

[...]

Os dados de comercialização de outubro apontam a venda de 8,4 milhões de unidades de genéricos.

(*O Estado de S. Paulo*, 16/12/2001.)

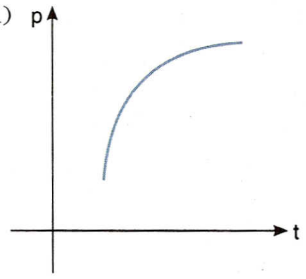
Vamos entender o significado da expressão *crescimento exponencial à taxa de 15% ao mês*:

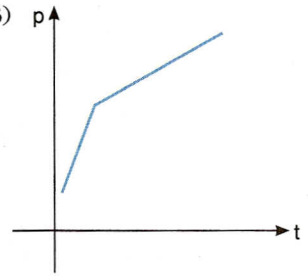
- *outubro* → 8,4 milhões de unidades vendidas
- *novembro* → $8{,}4 + \underbrace{0{,}15 \cdot 8{,}4}_{\text{15\% de aumento}} = 8{,}4 \cdot (1 + 0{,}15) = 1{,}15 \cdot 8{,}4$ milhões de unidades vendidas
- *dezembro* → o aumento de 15% é calculado sobre as vendas de *novembro*, e assim sucessivamente.

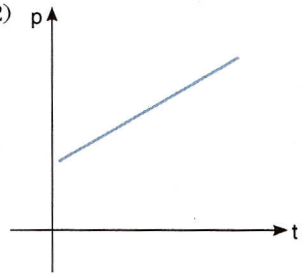
a) Quantas unidades de genéricos foram vendidas em dezembro de 2001?
b) Qual é a lei da função que relaciona o número de unidades de genéricos (f(x)) vendidas em x meses após outubro de 2001?

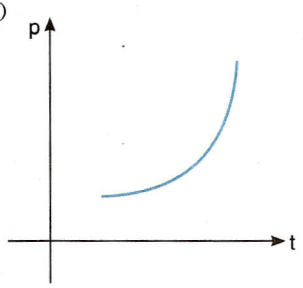
2 (UF-CE, adaptado) A população de uma cidade X aumenta 1500 habitantes por ano e a população de uma cidade Y aumenta 3% ao ano. Admita que, atualmente, a população de cada uma dessas cidades seja 100000 habitantes.

a) Qual é a lei que define a população p em cada uma dessas duas cidades daqui a t anos?
b) Em 2 anos, qual cidade terá maior número de habitantes?
c) Dos gráficos seguintes, selecione aqueles que melhor representam as populações p das cidades X e Y, em função do tempo t (dado em anos).

1)


3)


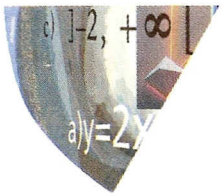
2)


4)


d) Usando a aproximação $1{,}03^{14} \cong \frac{3}{2}$, em quantos anos a população da cidade Y será de 150000 habitantes?

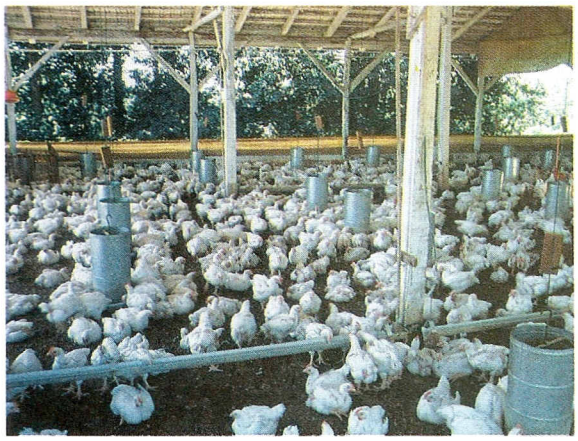
3 Sabendo que $2^x + 2^{-x} = 5$, calcule:

a) $4^x + 4^{-x}$ b) $8^x + 8^{-x}$



7 LOGARITMOS

1 Introdução


Fabio Colombini

Uma granja especializada na criação de frangos planejou operar de modo que o número de aves dobre a cada ano.

Após quantos anos o número de frangos passará a ser 5 vezes o número inicial?

Chamando de n o número inicial, teremos:

- após 1 ano de operação: $2n$ frangos;
- após 2 anos de operação: $2 \cdot 2n$ frangos;
- após 3 anos de operação: $2 \cdot 4n$ frangos;

e assim por diante.

O número de frangos vai evoluir da seguinte maneira:

$$n,\ 2n,\ 2^2n,\ 2^3n,\ \ldots,\ 2^xn,$$

sendo x o número de anos de operação.

Para responder à pergunta feita devemos resolver a equação $2^x \cdot n = 5n$, ou seja, $2^x = 5$, que é uma equação exponencial.

No estudo de equações e inequações exponenciais, feito no capítulo anterior, só tratamos de casos em que podíamos reduzir as potências à mesma base.

Entretanto, se tivermos de resolver uma equação como $2^x = 5$, não conseguiremos reduzir todas as potências à mesma base. Nesse caso, como $4 < 5 < 8$, então $4 < 2^x < 8$, ou seja, $2^2 < 2^x < 2^3$, e apenas poderemos garantir que $2 < x < 3$. Com os estudos feitos até aqui, não sabemos qual é o valor de x nem como determiná-lo. Para enfrentar esse e outros problemas, vamos estudar agora os logaritmos.

Definição

Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se *logaritmo de* b *na base* a o expoente x ao qual se deve elevar a base a de modo que a potência a^x seja igual a b.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Na expressão $\log_a b = x$, temos:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo.

Vejamos alguns exemplos de logaritmos:

$\log_2 4 = 2$, pois $2^2 = 4$

$\log_3 81 = 4$, pois $3^4 = 81$

$\log_2 \frac{1}{8} = -3$, pois $2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\log_7 7 = 1$, pois $7^1 = 7$

$\log_5 1 = 0$, pois $5^0 = 1$

$\log_2 \sqrt{2} = \frac{1}{2}$, pois $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

$\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$, pois $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$

Exemplo 1

Vamos agora calcular através da definição:

a) $\log_{\sqrt[3]{4}} 2$ b) $\log_{32} 0{,}125$

a) Fazendo $\log_{\sqrt[3]{4}} 2 = x$, temos:

$$(\sqrt[3]{4})^x = 2 \Rightarrow (\sqrt[3]{2^2})^x = 2 \Rightarrow (2^{\frac{2}{3}})^x = 2 \Rightarrow 2^{\frac{2x}{3}} = 2 \Rightarrow \frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

b) Fazendo $\log_{32} 0{,}125 = y$, temos:

$$32^y = 0{,}125 \Rightarrow (2^5)^y = \frac{1}{8} \Rightarrow 2^{5y} = 2^{-3} \Rightarrow 5y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$$

Observação

As restrições para a $(0 < a \neq 1)$ e para b $(b > 0)$, colocadas na definição, garantem a existência e a unicidade de $\log_a b$.

2 Conseqüências

Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades:

- **1ª** O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0.

$$\log_a 1 = 0 \quad , \text{ pois } a^0 = 1$$

- **2ª** O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1.

$$\log_a a = 1 \quad , \text{ pois } a^1 = a$$

- **3ª** A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual a b.

$$a^{\log_a b} = b \quad ,$$

pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar à base a para que a potência fique igual a b.

Exemplo 2

Vamos calcular o valor de $9^{\log_3 7}$.
Temos:

$$9^{\log_3 7} = (3^2)^{\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^2 = 7^2 = 49$$

- **4ª** Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais.

$$\log_a b = \log_a c \Rightarrow b = c \quad ,$$

pois $\log_a b = \log_a c \Rightarrow a^{\log_a c} = b \Rightarrow c = b$.

Exemplo 3

Vamos calcular o valor de x tal que $\log_2 (x^2 + x) = \log_2 (4x - 2)$.
Devemos ter $x^2 + x = 4x - 2$, e daí, $x^2 - 3x + 2 = 0$, isto é, $x = 1$ ou $x = 2$.

Verificação:

para x = 1: $\log_2 (1^2 + 1) = \log_2 (4 \cdot 1 - 2)$ (verdadeira)
para x = 2: $\log_2 (2^2 + 2) = \log_2 (4 \cdot 2 - 2)$ (verdadeira)

Conclusão: $x = 1$ ou $x = 2$.

3 ○ Sistemas de logaritmos

O conjunto formado por todos os logaritmos dos números reais positivos em uma base a ($0 < a \neq 1$) é chamado *sistema de logaritmos de base* ***a***. Por exemplo, o conjunto formado por todos os logaritmos de base 2 dos números reais positivos é o *sistema de logaritmos de base 2*.

Existem dois sistemas de logaritmos que são os mais utilizados em Matemática:

a) o *sistema de logaritmos decimais*, que é o de base 10. Esse sistema foi desenvolvido pelo matemático inglês Briggs (1536-1630), o primeiro a destacar as vantagens dos logaritmos de base 10 como instrumento auxiliar dos cálculos numéricos. Briggs foi também quem publicou a primeira tábua dos logaritmos de 1 a 1 000, fato ocorrido em 1617;

b) o *sistema de logaritmos neperianos*, que é o de base e. O nome *neperiano* deriva de John Napier (1550-1617), matemático escocês, autor do primeiro trabalho publicado sobre a teoria dos logaritmos.

Indicaremos com $\log_{10} x$, ou simplesmente $\log x$, o logaritmo decimal de x, e representaremos o logaritmo neperiano de x com $\log_e x$, ou $\ell n\ x$.

As calculadoras científicas possuem as teclas LOG e LN e fornecem, de um modo muito simples, os valores dos logaritmos decimais e neperianos de um número real positivo.

Veja:

- Para saber os valores de log 2 e ℓn 2, teclamos:

2 → LOG

2 → LN

Obtemos, respectivamente, 0,3010 e 0,693 .

- Para saber os valores de log 15 e ℓn 15, basta teclar:

15 → LOG

15 → LN

Obtemos, respectivamente, 1,1761 e 2,708 .

Exemplo 4

Vamos calcular o valor de $E = \ell n\ e^4 - \log 0{,}001$.
Temos:

$$\ell n\ e^4 = \log_e e^4 = x \Rightarrow e^x = e^4 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \ell n\ e^4 = 4$$

$$\log 0{,}001 = \log \frac{1}{1\,000} = \log 10^{-3} = -3$$

Então:

$$E = 4 - (-3) = 7$$

Exercícios

1 Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_3 27$ c) $\log 1\,000$ e) $\log_{\frac{1}{4}} 128$

b) $\log_2 64$ d) $\log_8 32$ f) $\ell n\ e^8$

2 Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

a) $\log_{0,25} 2$ c) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ e) $\log_5 0{,}008$

b) $\log_{49} \sqrt{7}$ d) $\log 10\sqrt{10}$ f) $\log_4 (\log_3 9)$

3 Supondo $m > 0$ e $m \neq 1$, calcule os seguintes logaritmos:

a) $\log_{m^2} \sqrt[3]{m}$ b) $\log_{\sqrt{m}} \frac{1}{m}$ c) $\log_{m^3} m^6$

4 Calcule o valor de:

a) $3^{\log_3 2}$ b) $e^{\ell n\ 4}$ c) $5^{1\ +\ \log_5 2}$ d) $e^{2\ -\ \ell n\ 3}$

5 Calcule o valor de $y = \dfrac{\log_4 4 + \log_{25} 0{,}2}{\log_{19} 1 - \log_{0,\bar{3}} 27}$.

6 (UF-CE) Sendo a e b números reais positivos tais que $\log_{\sqrt{3}} a = 224$ e $\log_{\sqrt{3}} b = 218$, calcule o valor de $\frac{a}{b}$.

7 (Mackenzie-SP) Sabendo que $x^2 + 4x + 2\log_7 m^2$ é um trinômio quadrado perfeito, determine o logaritmo de m na base 7m.

8 Supondo a e b reais positivos tais que $\log_{\frac{1}{2}} a = 3$ e $\log_{\frac{1}{2}} b = -1$, qual é o valor de:

a) $\log_b a$? b) $\log_a b$? c) $\log_{a^2} b^3$?

4 ○ Propriedades operatórias

Vamos agora estudar três propriedades operatórias envolvendo logaritmos:

▶ **1ª** *Logaritmo do produto*

"Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais e positivos é igual à soma dos logaritmos dos números."

Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b \cdot c) = z$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b \cdot c) = z \Rightarrow a^z = b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y = a^{x\ +\ y} \Rightarrow z = x + y$$

Essa propriedade também é válida para o logaritmo de três ou mais números reais e positivos, ou seja: Se $0 < a \neq 1$ e $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, ..., $b_n > 0$, então:

$$\log_a (b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n) = \log_a b_1 + \log_a b_2 + \ldots + \log_a b_n$$

Vejamos alguns exemplos:

$\log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 3 + \log_2 4$
$\log_3 (4 \cdot 5 \cdot 6) = \log_3 4 + \log_3 5 + \log_3 6$
$\log_{10} 210 = \log_{10} (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7) = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 + \log_{10} 5 + \log_{10} 7$

▶ **2ª** *Logaritmo do quociente*

"Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais e positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor."
Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \frac{b}{c} = z$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \frac{b}{c} = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_2 \frac{3}{4} = \log_2 3 - \log_2 4$$

$$\log_3 \frac{1}{7} = \log_3 1 - \log_3 7 = -\log_3 7$$

$$\log_{10} \frac{6}{5} = \log_{10} 6 - \log_{10} 5 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - \log_{10} 5$$

▶ **3ª** *Logaritmo da potência*

"Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência."
Em símbolos: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $r \in \mathbb{R}$, então:

$$\log_a b^r = r \cdot \log_a b$$

De fato, fazendo $\log_a b = x$ e $\log_a b^r = y$, temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = (a^x)^r = a^{rx} \Rightarrow y = rx$$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_2 3^7 = 7 \cdot \log_2 3$$

$$\log_5 \sqrt{3} = \log_5 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_5 3$$

$$\log_3 \frac{1}{16} = \log_3 2^{-4} = -4 \cdot \log_3 2$$

5 ○ Utilização das propriedades

As propriedades dos logaritmos:

1ª $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

2ª $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

3ª $\log_a b^r = r \cdot \log_a b$,

que são válidas para $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, permitem-nos obter o logaritmo de um produto, de um quociente ou de uma potência sendo conhecidos apenas os logaritmos dos termos do produto, ou dos termos do quociente, ou da base da potência.

Expressões que envolvem apenas operações de multiplicação, divisão e potenciação são chamadas *expressões logarítmicas*, pois podem ser calculadas utilizando-se logaritmos.

Exemplo 5

A expressão $E = \frac{(9{,}2)^6 \cdot \sqrt[3]{5{,}87}}{(1{,}43)^{10}}$ pode ser calculada com a ajuda de logaritmos porque:

$$\log E = \log \frac{(9{,}2)^6 \cdot \sqrt[3]{5{,}87}}{(1{,}43)^{10}} = \log [(9{,}2)^6 \cdot \sqrt[3]{5{,}87}] - \log (1{,}43)^{10} =$$

$$= \log (9{,}2)^6 + \log \sqrt[3]{5{,}87} - \log (1{,}43)^{10} =$$

$$= 6 \cdot \log 9{,}2 + \frac{1}{3} \cdot \log 5{,}87 - 10 \cdot \log 1{,}43$$

Se dispusermos de uma calculadora que dê os valores de log 9,2, log 5,87 e log 1,43, poderemos calcular log E e, pela mesma calculadora, obter *E*.

Exemplo 6

Vamos calcular o valor de $E = \log_b \frac{x^2}{\sqrt[5]{y}}$, sabendo que $\log_b x = -3$ e $\log_b y = 2$.

Utilizando as propriedades operatórias, temos:

$$E = \log_b \frac{x^2}{\sqrt[5]{y}} = \log_b x^2 - \log_b \sqrt[5]{y} = 2 \cdot \log_b x - \frac{1}{5} \cdot \log_b y =$$

$$= 2 (-3) - \frac{1}{5} \cdot 2 = -6 - \frac{2}{5} = -\frac{32}{5}$$

Exemplo 7

Se $\log E = -3 + \log a + 3 \cdot \log b - 4 \cdot \log c$, vamos determinar *E*.
Temos:

$$\log E = \log 10^{-3} + \log a + \log b^3 - \log c^4 =$$

$$= \log (10^{-3} \cdot a \cdot b^3) - \log c^4 = \log \frac{10^{-3} \cdot a \cdot b^3}{c^4} = \log \frac{a \cdot b^3}{10^3 \cdot c^4}$$

Então: $E = \frac{a \cdot b^3}{1\,000\, c^4}$.

Exemplo 8

Sendo $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, vamos calcular log 108 em função de *a* e *b*.
Temos:

$$\log 108 = \log (4 \cdot 27) = \log 4 + \log 27 = \log 2^2 + \log 3^3 =$$
$$= 2 \cdot \log 2 + 3 \cdot \log 3 = 2a + 3b$$

Exercícios

9 Supondo x, y e b reais positivos, com $b \neq 1$ e sabendo que $\log_b x = 2$ e $\log_b y = 3$, qual é o valor de:

a) $\log_b (x \cdot y)$?

b) $\log_b \left(\frac{x}{y}\right)$?

c) $\log_b x^2$?

d) $\log_b \left(\frac{x^3}{y^2}\right)$?

e) $\log_b (b \cdot \sqrt{xy})$?

10 Supondo x e y reais positivos com $\log_3 x = a$ e $\log_3 y = b$, calcule, em função de a e b:

a) $\log_3 \left(\frac{\sqrt{x}}{y^2}\right)$

b) $\log_3 (9x\sqrt{y})$

c) $\log_3 \left(\frac{3x}{\sqrt[3]{y}}\right)$

11 (PUC-MG) Sabe-se que Y é um número positivo e que $\frac{1}{2} \log Y = \log 2 - \frac{1}{4} \log 3$.
Qual é o valor de Y?

12 Se x é um número real positivo e $\log x = 2 \cdot \log a + \log b - 3 \log c$, qual é o valor de x em função de a, b e c?

13 (UF-CE) Resolva a equação:

$$3^{x^2 - 8} + \log_{10} \left[\log_{10} \left(\sqrt[10]{\sqrt[10]{\sqrt[10]{10}}}\right)\right] = 0$$

14 Se $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$, calcule em função de a e b os seguintes logaritmos decimais:

a) $\log 6$
b) $\log 12$
c) $\log 1{,}5$
d) $\log 0{,}25$
e) $\log 5$
f) $\log 180$
g) $\log \sqrt[5]{72}$
h) $\log 500$

15 Sabendo que $\log 2 \cong 0{,}301$, calcule o valor de:

a) $\log 200$

b) $\log \left(\frac{\sqrt{125}}{8}\right)$

c) $\log \left(\sqrt[3]{2} \cdot 10^{-5}\right)$

16 Se $\log 5 = k$, determine em função de k:

a) $\log 2$
b) $\log \sqrt[3]{25}$
c) $\log 5\,000$
d) $\log 1\,250$

17 (UF-MG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log [H^+]$, em que $[H^+]$ indica a concentração, em mol/ℓ, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.
Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/ℓ.
Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30, para log 2, e de 0,48, para log 3.
Então, qual é o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução?

18 Se x e y são reais positivos tais que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, é verdade que $\log (x + y) = \log x + \log y$? Explique.

19 Sabendo que $\log 300 = a$, qual é, em função de a, o valor de $x = \log 2 + \log 3 + \log 5$?

20 Sabendo que $a + b = 9$ e $a^2 - b^2 = 27$, qual é o valor de $\log_3 (a - b)$?

6 ○ Mudança de base

Há situações em que nos defrontamos com um logaritmo em certa base e temos de convertê-lo a outra base.

Por exemplo, para aplicarmos as propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos na mesma base. Senão, é preciso que alguns logaritmos mudem de base.

Outro exemplo: se quisermos determinar o valor de um logaritmo de base não decimal (por exemplo, $\log_2 5$), devemos conhecer a relação que ele tem com o logaritmo decimal ($\log_{10} 5$) ou com o logaritmo neperiano ($\ell n\ 5$). Aí, com o auxílio de uma calculadora, podemos efetuar tal cálculo, como veremos nos exemplos mais adiante.

Fórmula para mudança de base

Suponhamos que a, b e c sejam números reais positivos e diferentes de 1. Vamos imaginar que saibamos o valor de $\log_c b = y$ e seja desconhecido o valor de $\log_a b = x$. Como podemos calcular x?

Façamos $\log_c a = z$ e procuremos uma relação entre x, y e z.

Temos:

$$\log_a b = x \Rightarrow a^x = b \quad (I)$$
$$\log_c b = y \Rightarrow c^y = b \quad (II)$$
$$\log_c a = z \Rightarrow c^z = a \quad (III)$$

Substituindo (III) e (II) em (I), vem:

$$a^x = b \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z}$$

(a: c^z; b: c^y)

Concluindo:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Vejamos alguns exemplos:

CALCULADORA

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} \overset{\downarrow}{=} \frac{0{,}6999}{0{,}3010} \cong 2{,}32$$

CALCULADORA

$$\log_5 7 = \frac{\ell n\ 7}{\ell n\ 5} \overset{\downarrow}{=} \frac{1{,}9459}{1{,}6094} \cong 1{,}209$$

CALCULADORA

$$\log_{100} 7 = \frac{\log_{10} 7}{\log_{10} 100} \overset{\downarrow}{\cong} \frac{1{,}8451}{2} \cong 0{,}4225$$

Aplicação importante

Dados a e b reais positivos e diferentes de 1, qual é a relação entre $\log_a b$ e $\log_b a$?

Vamos aplicar a fórmula da mudança de base supondo $c = b$.

Temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} = \frac{\log_b b}{\log_b a} = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{ou} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1$$

Exemplo 9

Vamos calcular o valor de $\log_{100} \sqrt[3]{4,5}$, sabendo que $\log 2 = a$ e $\log 3 = b$.
Utilizemos a fórmula da mudança de base.
Temos:

$$\log_{100} \sqrt[3]{4,5} = \frac{\log \sqrt[3]{4,5}}{\log 100} = \frac{\log \sqrt[3]{\frac{9}{2}}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \log \frac{9}{2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \log \frac{3^2}{2} = \frac{1}{6} (\log 3^2 - \log 2) = \frac{1}{6} (2 \log 3 - \log 2) = \frac{2b - a}{6}$$

Exercícios

21 Escreva em base 10 os seguintes logaritmos e, com o auxílio da calculadora, encontre seus valores:

a) $\log_2 3$ b) $\log_{100} 2$ c) $\log_3 \sqrt{10}$

22 Escreva em base e os seguintes logaritmos e, com o auxílio da calculadora, encontre seus valores:

a) $\log_2 7$ b) $\log_5 3$

23 Sabendo-se que $\ell n\ 5 \cong 1,6$ e $\ell n\ 10 \cong 2,3$, qual é o valor de $\log_{10} 5$?

24 (UF-RN) Os habitantes de um certo país são apreciadores dos logaritmos em bases potências de dois. Nesse país, o Banco Zig oferece empréstimos com a taxa (mensal) de juros $T = \log_8 225$, enquanto o Banco Zag trabalha com a taxa (mensal) $S = \log_2 15$.
Com base nessas informações:

a) estabeleça uma relação entre T e S;
b) determine em qual dos bancos um cidadão desse país, buscando a menor taxa de juros, deverá fazer empréstimo. Justifique.

25 (UFF-RJ) Considere $\log_b \frac{1}{a} = x$, sendo $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $b \neq 1$. Expresse $\log_a b^2$, em termos de x.

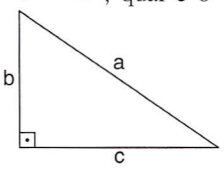
26 Sabendo que $\log_{20} 2 = a$ e $\log_{20} 3 = b$, calcule, em função de a e b:

a) $\log_6 18$ b) $\log_{12} 25$

27 (Umesp-SP) Sabendo-se que $m = 2^{5 + \log_2 3} + 3^{\log_2 7 \cdot \log_3 2}$, qual é o valor de m?

28 Na figura, $a - b \neq 1$ e $a + b \neq 1$.

Mostre que $\frac{1}{\log_{a+b} c} + \frac{1}{\log_{a-b} c} = 2$.



Testes de vestibulares

1 (UFF-RJ) No dia 6 de junho de 2000, um terremoto atingiu a cidade de Ankara, na Turquia, com registro de 5,9 graus na escala Richter e outro terremoto atingiu o oeste do Japão, com registro de 5,8 graus na escala Richter.
Considere que m_1 e m_2 medem a energia liberada sob a forma de ondas que se propagam pela crosta terrestre por terremotos com registros, na escala Richter, r_1 e r_2, respectivamente.
Sabe-se que esses valores estão relacionados pela fórmula:

$$r_1 - r_2 = \log_{10} \left(\frac{m_1}{m_2} \right)$$

Considerando-se que r_1 seja o registro do terremoto da Turquia e r_2 o registro do terremoto do Japão, pode-se afirmar que $\frac{m_1}{m_2}$ é igual a:

a) 10^{-1}
b) $10^{0,1}$
c) $(0,1)^{10}$
d) $\frac{10}{0,1}$
e) $\frac{1}{0,1}$

2 (Cefet-MG) O valor de $W = \log 2 + \log 20 + \log 25$ é:

a) 3 c) 5 e) 7
b) 4 d) 6

3 (Unifor-CE) Se x e y são números reais positivos tais que $y = 16^{\log_2 x}$, então x é igual a:

a) $\sqrt{y}$ c) $2y$ e) $\frac{\sqrt[4]{y}}{2}$
b) $4y$ d) $\sqrt[4]{y}$

4 (Unifor-CE) Se $\log 21 = 1{,}3222$, então:

a) $\log 210 = 13{,}222$
b) $\log 2\,100 = 2{,}3222$
c) $\log 0{,}021 = -6{,}778$
d) $\log 0{,}21 = -0{,}6778$
e) $\log 2{,}1 = 0{,}13222$

5 (Mackenzie-SP) Se $\log \alpha = 6$ e $\log \beta = 4$, então $\sqrt[4]{\alpha^2 \cdot \beta}$ é igual a:

a) $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{4}$ c) 24 e) β
b) 10 d) $\sqrt{6}$

6 (UE-PI) Se $\sqrt{9^{p+1}} = 3^{\sqrt{2}}$ e $\log_2 (q - 1) = \frac{1}{2}$, então $p^2 + p \cdot q + q^2$ é igual a:

a) 4 c) 6 e) 8
b) 5 d) 7

7 (F. Visconde de Cairu-BA) Sabendo-se que $\log 2 = 0{,}301$, pode-se afirmar que $\log 80$ é igual a:

a) 1,302 c) 1,903 e) 2,203
b) 1,603 d) 2,102

8 (Unip-SP) Se os números reais positivos x e y forem tais que

$$\begin{cases} \log_{10} 2^x + \log_{10} 3^y = 1 \\ \log_{10} 8^x + \log_{10} 9^y = 2, \end{cases}$$

então:

a) $x = 1$ d) $x = \log_{10} 3$
b) $y = 0$ e) $xy = 1$
c) $y = \log_3 10$

9 (UPE-PE) Seja $f(x) = e^{\frac{1}{\log_2 e}} \cdot (x^2 + 5)$. Um quociente das soluções da equação $f(x) = 12x$ pode ser:

a) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{3}$
b) 5 e) $\frac{6}{5}$
c) 6

10 (UF-CE) Suponha que o nível sonoro β e a intensidade I de um som estejam relacionados pela equação logarítmica $\beta = 120 + 10 \log_{10} I$, em que β é medido em decibéis e I, em watts por metro quadrado. Seja I_1 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 80 decibéis de um cruzamento de duas avenidas movimentadas, e I_2 a intensidade correspondente ao nível sonoro de 60 decibéis do interior de um automóvel com ar-condicionado. A razão $\frac{I_1}{I_2}$ é igual a:

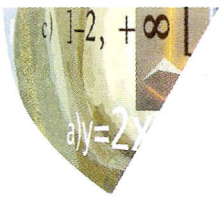
a) $\frac{1}{10}$ d) 100
b) 1 e) 1 000
c) 10

Desafio

(IME-RJ) Sejam a e b números reais positivos e diferentes de 1.
Dado o sistema abaixo:

$$\begin{cases} a^x \cdot b^{\frac{1}{y}} = \sqrt{ab} \\ 2 \cdot \log_a x = \log_{\frac{1}{b}} y \cdot \log_{\sqrt{a}} b, \end{cases}$$

determine os valores de x e y.



8

FUNÇÃO LOGARÍTMICA

1 ○ Introdução

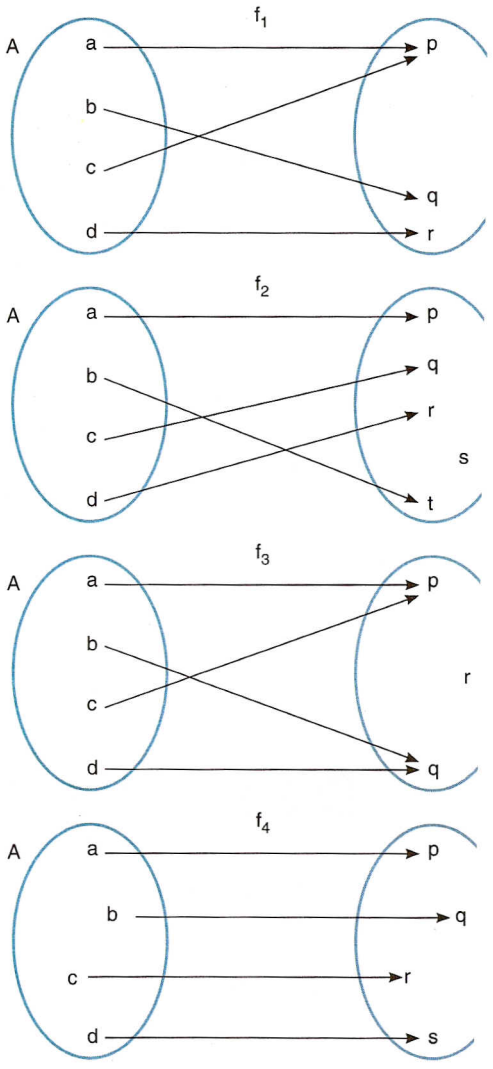
Vamos observar os pares de elementos correspondentes, indicados pelas flechas, nas quatro funções f_1, f_2, f_3 e f_4.

Como f_1, f_2, f_3 e f_4 são funções, para cada uma delas em particular podemos afirmar que todo elemento do conjunto A (domínio) tem um único correspondente no contradomínio. Todo elemento do domínio é ponto de "partida" de uma única flecha.

Quando analisamos o contradomínio de cada uma dessas funções, notamos diferenças:

- em f_1, todo elemento do contradomínio {p, q, r} é correspondente de algum elemento de A. Todo elemento do contradomínio é ponto de "chegada" de pelo menos uma flecha. Não há nenhum elemento que não seja "alvo";
- em f_2, os elementos p, q, r e t do contradomínio são os correspondentes de algum elemento do domínio, mas o elemento s não é correspondente de nenhum.
  Todo elemento do contradomínio é ponto de "chegada" de no máximo uma flecha (zero ou uma). Não há flechas convergindo para o mesmo "alvo";
- em f_3, os elementos p e q do contradomínio são correspondentes de dois elementos de A, mas o elemento r não é correspondente de nenhum;
- finalmente, em f_4, todo elemento do contradomínio é correspondente de um único elemento de A. Todo elemento do contradomínio é ponto de "chegada" de uma única flecha.

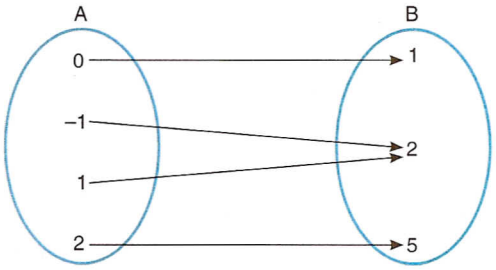
Observações como essas nos permitirão classificar as funções em *sobrejetoras*, *injetoras*, *bijetoras* ou em nenhuma dessas três categorias.



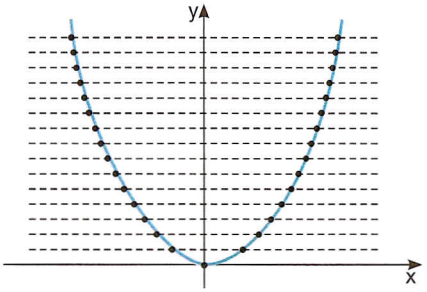
2 ○ Funções sobrejetoras

Vamos observar as três funções a seguir.

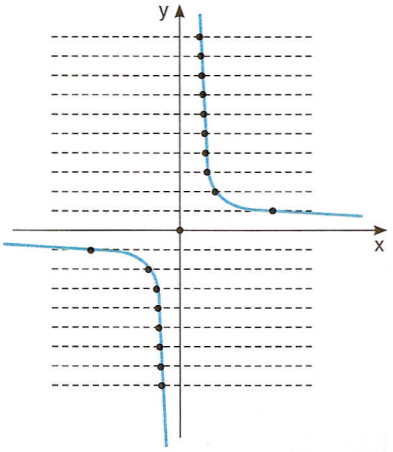
1ª) A função f de A = {–1, 0, 1, 2} em B = {1, 2, 5}, definida pela lei $f(x) = x^2 + 1$. Para todo elemento y de B existe um elemento x de A tal que $y = x^2 + 1$. Para todo elemento de B converge pelo menos uma flecha.



2ª) A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}_+$, definida pela lei $f(x) = x^2$. Para todo elemento y de $\mathbb{R}_+$ existe um elemento x de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$, bastando tomar $x = \pm\sqrt{y}$.
Para todo elemento de $\mathbb{R}_+$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f.



3ª) A função f de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}^*$, definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x}$. Para todo elemento y de $\mathbb{R}^*$ existe um elemento x de $\mathbb{R}^*$ tal que $y = \frac{1}{x}$, bastando tomar $x = \frac{1}{y}$. Para todo elemento y de $\mathbb{R}^*$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f.



Essas três funções são exemplos de funções *sobrejetoras*.

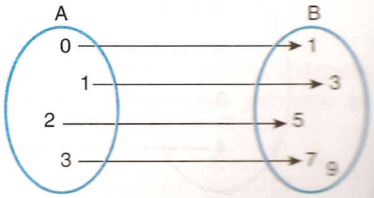
Uma função f : A → B é *sobrejetora* quando, para todo y pertencente a B, existe um x pertencente a A tal que $f(x) = y$.

Quando f : A → B é sobrejetora, ocorre Im(f) = B.

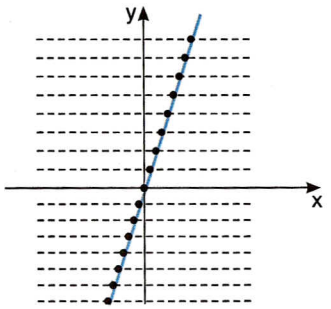
3 ○ Funções injetoras

Vamos observar as três funções a seguir.

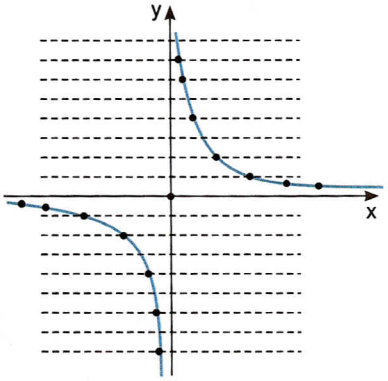
1ª) A função f de A = {0, 1, 2, 3} em B = {1, 3, 5, 7, 9}, definida pela lei $f(x) = 2x + 1$.
Dois elementos distintos de A têm como imagem dois elementos distintos de B.
Não existem duas flechas convergindo para um mesmo elemento de B.



2º) A função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = 3x$.
Quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}$, se $x_1 \neq x_2$, temos $3x_1 \neq 3x_2$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Para todo elemento y de $\mathbb{R}$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f uma única vez.



3º) A função f de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$, definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x}$.
Quaisquer que sejam x_1 e x_2 de $\mathbb{R}^*$, se $x_1 \neq x_2$, temos $\frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2}$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$.
Para todo elemento y de $\mathbb{R}$, a paralela ao eixo das abscissas intercepta o gráfico de f uma única vez ou nenhuma vez.



Essas três funções são exemplos de funções *injetoras*.

Uma função $f : A \to B$ é *injetora* quando, para todos x_1 e x_2 pertencentes a A: $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$.

4 ○ Funções bijetoras ou inversíveis

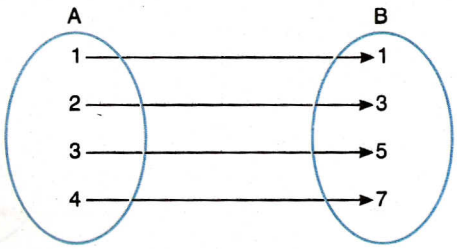
Uma função $f : A \to B$ é *bijetora* quando f é sobrejetora e injetora.

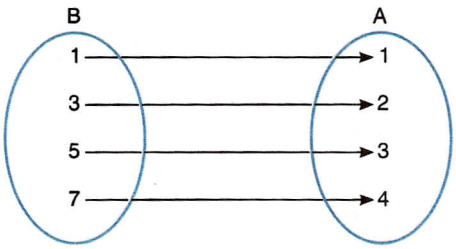
São exemplos de funções bijetoras:

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x$.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$.
3. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ tal que $f(x) = \frac{1}{x}$.

5 ○ Função inversa

Vamos observar a função f de $A = \{1, 2, 3, 4\}$ em $B = \{1, 3, 5, 7\}$, definida pela lei $f(x) = 2x - 1$.
Notemos que f é bijetora, pois é injetora e também sobrejetora.





Como todo elemento de B é o correspondente de um único elemento de A, podemos trocar os conjuntos de posição e associar cada elemento de B ao seu correspondente de A. Teremos, dessa forma, construído uma função denominada *função inversa* de f e representada com o símbolo f^{-1}.

Notemos que f^{-1} também é bijetora, $D(f^{-1}) = B$ e $Im(f^{-1}) = A$.

Quando x e y são variáveis que se inter-relacionam de modo que a cada valor atribuído a x está associado um único valor de y, dizemos que y é *função* f de x.

$$y = f(x)$$

Se também acontece que a cada valor atribuído a y está associado um único valor de x, dizemos que x também é *função* de y. Essa função recebe o nome de *função inversa de* f, e é representada por f^{-1}.

$$x = f^{-1}(y)$$

Nesse caso, a função f é inversível.

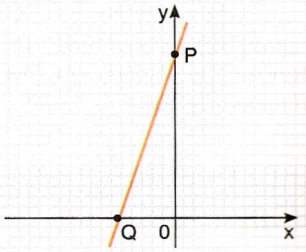
Para a construção de gráficos é importante notarmos que, se f é inversível e um par (a, b) está na tabela de f, então o par (b, a) está na tabela de f^{-1}. Conseqüentemente, cada ponto (b, a) do gráfico de f^{-1} é simétrico de um ponto (a, b) do gráfico de f em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. E, portanto, o gráfico de f^{-1} é simétrico do gráfico de f em relação à mesma bissetriz.

Inversas de algumas funções

Exemplo 1

Vejamos agora como constatar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela fórmula $y = 3x + 4$ é inversível, como determinar a inversa de f e como construir os gráficos de ambas as funções.

Sendo f uma função afim, seu gráfico é uma reta $\overleftrightarrow{PQ}$ da qual P e Q são obtidos atribuindo-se dois valores a x e calculando-se os correspondentes valores de y.

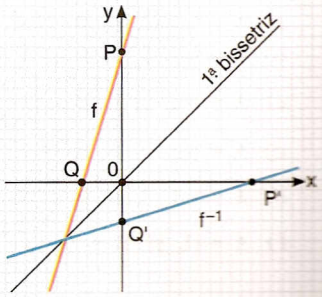


Ponto	x	y = 3x + 4
P	0	$y = 3 \cdot 0 + 4 = 4$
Q	$-\frac{4}{3}$	$y = 3\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = 0$

Podemos notar nesse gráfico que, para cada valor de y, existe em correspondência um único valor de x; além disso, $Im(f) = \mathbb{R}$. Assim, f é inversível.

Vamos construir o gráfico de f^{-1}.

Esse gráfico é simétrico ao gráfico de f, em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes. Dessa forma, o gráfico de f^{-1} é a reta $\overleftrightarrow{P'Q'}$, $P' = (4, 0)$ e $Q' = \left(0, -\frac{4}{3}\right)$.



Agora vamos determinar a fórmula que define f^{-1}. A partir da fórmula $y = 3x + 4$, que define f, vamos expressar x em função de y:

$$y = 3x + 4 \Rightarrow 3x = y - 4 \Rightarrow x = \frac{y - 4}{3}$$

Em geral, quando se vai representar no plano cartesiano o gráfico de uma função, a variável independente é indicada no eixo das abscissas, e a dependente, no eixo das ordenadas. Assim, vamos permutar as variáveis x e y na fórmula obtida.

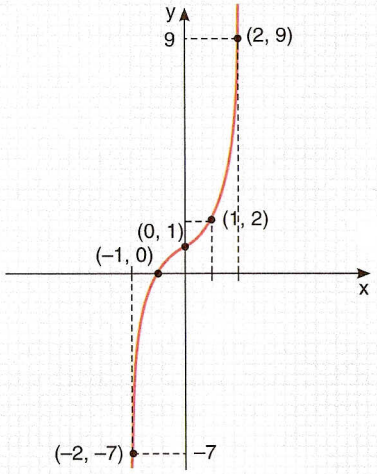
Temos $y = \frac{x - 4}{3}$, que é a fórmula que define f^{-1}.

Exemplo 2

Vejamos como constatar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela fórmula $y = x^3 + 1$ é inversível, como determinar a inversa de f e como construir os gráficos de ambas as funções.

A função $y = x^3 + 1$ é uma função crescente em $\mathbb{R}$ e seu gráfico contém, por exemplo, os pontos:

x	y
–2	–7
–1,5	–2,375
–1	0
–0,5	0,875
0	1
0,5	1,125
1	2
1,5	4,375
2	9



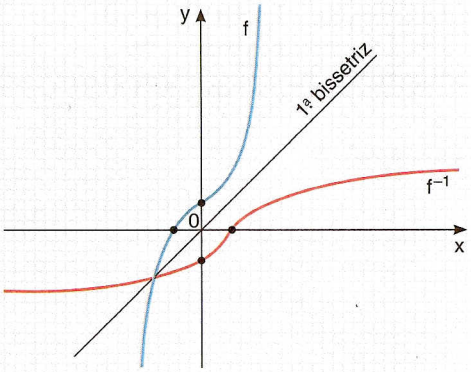
A cada y corresponde um único valor de x. Além disso, o conjunto imagem coincide com o contradomínio; portanto, f é inversível. Vamos agora obter a fórmula que define f^{-1}:

$$y = x^3 + 1 \Rightarrow x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 1}$$

e, permutando x com y, resulta:

$$y = \sqrt[3]{x - 1}$$

O diagrama ao lado mostra os gráficos das duas funções (simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares).



Exercícios

1 Verifique, em cada caso, se f: A → B é inversível, justificando sua resposta. Forneça, quando existir, a lei que define $f^{-1}(x)$:

a) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$ e $f(x) = 2x$

b) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ e $f(x) = x^2$

c) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \left\{\frac{1}{10}, 1, 10\right\}$ e $f(x) = 10^x$

d) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e $f(x) = x^3$

e) $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ e $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$

f) $A = \{1, e\}$, $B = \{0, 1\}$ e $f(x) = \ell n\, x$

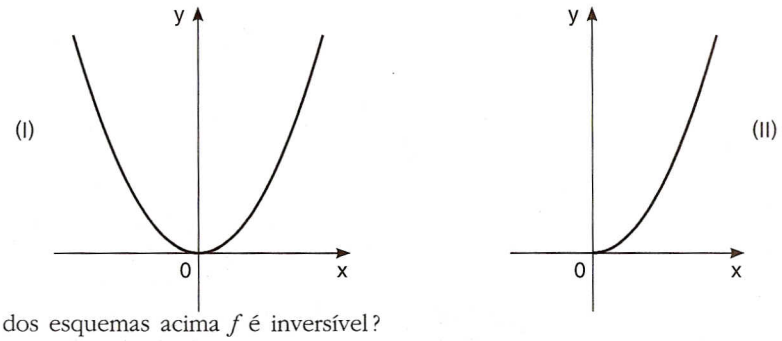
2 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

a) Calcule $f^{-1}(3)$ e $f^{-1}(0)$, sem encontrar a lei que define f^{-1}.

b) Obtenha a lei que define f^{-1}.

c) Represente f e f^{-1} no mesmo gráfico.

3 Os gráficos seguintes representam a função $f(x) = x^2$ com dois domínios diferentes: $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+$. Observe que, em ambos os casos, Im = $\mathbb{R}^+$.



a) Em qual dos esquemas acima f é inversível?
b) Qual é a lei que define f^{-1} no esquema do item a?
Represente graficamente as duas funções f e f^{-1} no mesmo plano.
c) Explique por que no outro esquema f *não* é inversível.

4 Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = -2x + 3$.

a) Represente f e f^{-1} no mesmo plano.
b) Qual é o ponto de interseção dos gráficos obtidos?

5 (Unimes-SP) Qual é a inversa da função $y = \frac{x + 5}{2x - 3}\left(\text{com } x \neq \frac{3}{2}\right)$?

6 Função logarítmica

Nivaldo deposita suas economias em uma caderneta de poupança especial, que rende 2% ao mês. Por quantos meses ele deverá deixar o dinheiro na conta para que seu valor dobre?

Vamos chamar de c o valor inicial depositado por Nivaldo. Qual será o saldo na poupança no fim do 1º mês da aplicação?

Será $c + 2\%$ de $c = c + \frac{2}{100}c = c + 0{,}02c = 1{,}02c$.

Qual será o saldo em conta no final do 2º mês de aplicação? Bem, no 2º mês o rendimento de 2% será calculado sobre o saldo em conta no fim do 1º, ou seja, sobre 1,02c.

Assim, teremos o saldo de:

$$1{,}02c + 0{,}02\,(1{,}02c) = 1{,}02c\,(1 + 0{,}02) = (1{,}02)^2c$$

Qual será o saldo na poupança no final do 3º mês?

Será $(1{,}02)^3c$.

Qual será o saldo na poupança no final de n meses de aplicação?

Será $(1{,}02)^nc$.

Como queremos que a importância dobre, ou seja, que ela fique igual a 2c no final de n meses, então:

$$(1{,}02)^nc = 2c \Rightarrow (1{,}02)^n = 2$$

Aplicando logaritmos, vem:

$$\log_{1{,}02}(1{,}02)^n = \log_{1{,}02} 2$$

$$n = \log_{1{,}02} 2 \quad \text{(aproximadamente 35 meses)}$$

E se quiséssemos que o capital inicial triplicasse? Qual seria o número de meses?

$$n = \log_{1,02} 3 \qquad \text{(aproximadamente 55 meses)}$$

E se quiséssemos que o capital inicial fosse multiplicado por x? Qual seria o número de meses?

$$n = \log_{1,02} x$$

Enfim, para que o capital inicial seja multiplicado por x, é necessário que transcorra um prazo de $n(x)$ meses. O valor $n(x)$ é uma função de x dada pela lei:

$$n(x) = \log_{1,02} x$$

que é um caso particular de *função logarítmica*.

Definição

Dado um número real a (com $0 < a \neq 1$), chama-se *função logarítmica de base* $\boldsymbol{a}$ a função de $\mathbb{R}_+^*$ em $\mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = \log_a x$.

São logarítmicas, por exemplo, as funções $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$ e $y = \log_e x$.

Exemplo 3

Vejamos como descobrir o domínio da função definida por $f(x) = \log_{(x-2)} (5 - 2x)$.
Devemos ter $5 - 2x > 0$, $x - 2 > 0$ e $x - 2 \neq 1$.

E daí obtemos respectivamente: $x < \frac{5}{2}$, $x > 2$ e $x \neq 3$.

Fazendo a interseção desses três conjuntos, resulta $2 < x < \frac{5}{2}$.

Então, $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < \frac{5}{2}\right\}$.

Gráfico

Exemplo 4

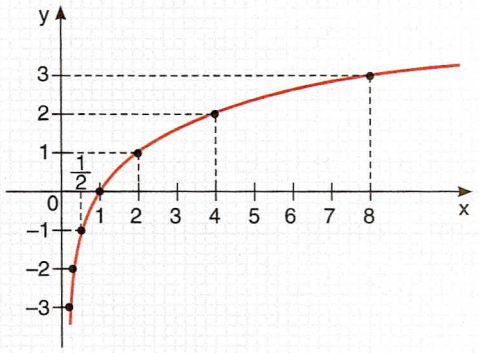
Vamos construir o gráfico da função $y = \log_2 x$, definida para $x > 0$.
Inicialmente, construímos uma tabela dando valores a y, para depois calcularmos x.

x	$y = \log_2 x$
	–3
	–2
	–1
	0
	1
	2
	3

→

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3

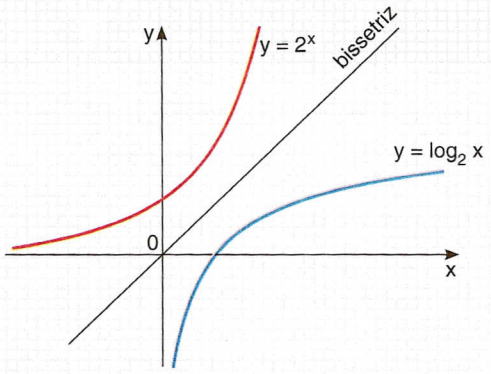
→



Outro modo de construir esse gráfico é considerar que, se $y = \log_2 x$, então $x = 2^y$. Isso significa que o ponto (x, y) está no gráfico da função logarítmica se o seu "inverso" (y, x) está na função exponencial de mesma base. Mas os pontos (x, y) e (y, x) são simétricos em relação à bissetriz do 1º e do 3º quadrantes do plano cartesiano. Portanto, conhecendo o gráfico da função exponencial de base 2, obtemos por simetria o gráfico da função logarítmica de base 2.

x	$y = 2^x$
–3	$\frac{1}{8}$
–2	$\frac{1}{4}$
–1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

x	$y = \log_2 x$
$\frac{1}{8}$	–3
$\frac{1}{4}$	–2
$\frac{1}{2}$	–1
1	0
2	1
4	2
8	3



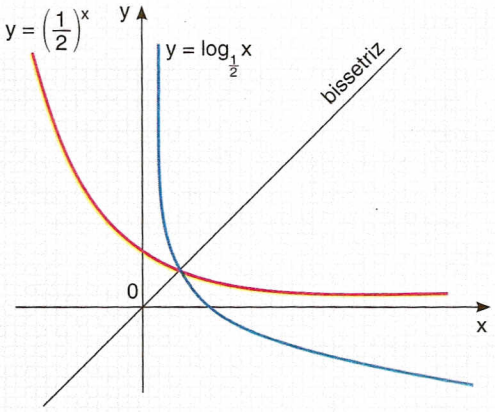
Exemplo 5

Vejamos como construir o gráfico da função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, definida para $x > 0$.

Vamos lembrar como é o gráfico da função exponencial de base $\frac{1}{2}$ e, por simetria, obter o gráfico da função logarítmica de base $\frac{1}{2}$.

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
–3	8
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

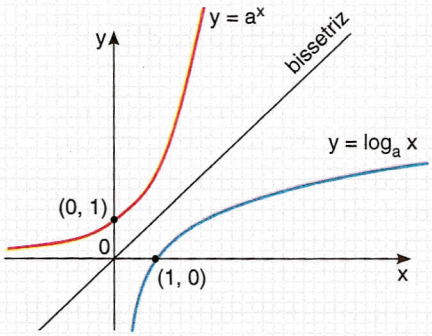
x	$y = \log_{\frac{1}{2}} x$
8	–3
4	–2
2	–1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	3



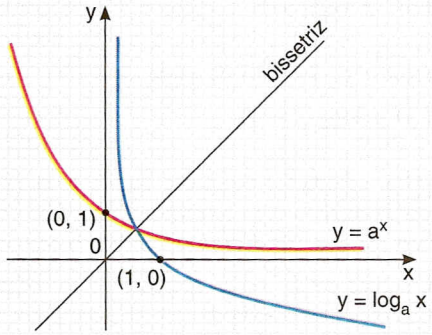
De modo geral, o gráfico da função $y = \log_a x$ tem as seguintes características:

a) está todo à direita do eixo dos *y*, pois a função só é definida para $x > 0$;
b) corta o eixo dos *x* no ponto de abscissa 1, pois $y = \log_a 1 = 0$ para todo *a*;
c) é simétrico do gráfico da função $y = a^x$ em relação à reta bissetriz do 1º e do 3º quadrantes;
d) toma o aspecto de um dos gráficos abaixo:

$a > 1$



$0 < a < 1$



Exercícios

6 Seja f: $\mathbb{R} \to]+2, +\infty[$ definida por $f(x) = 3^x + 2$.

a) Obtenha a lei que define $f^{-1}(x)$.

b) Represente f e f^{-1} no mesmo gráfico.

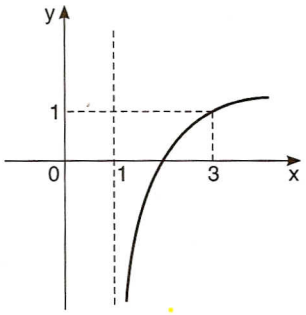
7 Seja f: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_5 x$.

a) Calcule $f(25)$ e $f^{-1}(2)$.

b) Qual é a lei que define $f^{-1}(x)$?

c) Represente f e f^{-1} no mesmo gráfico.

8 Seja f: $]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a (x - 1)$, cujo gráfico está representado ao lado.

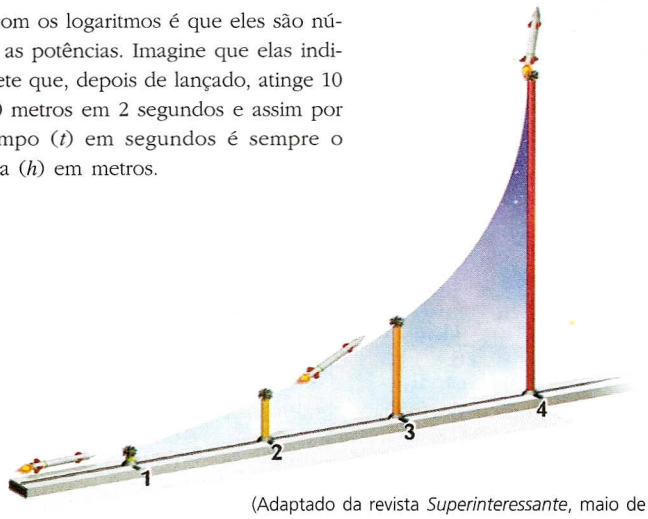


a) Determine o valor de a.

b) Calcule $f^{-1}(1)$ e $f^{-1}(-1)$.

9 (UF-MT)

[...] A vantagem de lidar com os logaritmos é que eles são números mais curtos do que as potências. Imagine que elas indiquem a altura de um foguete que, depois de lançado, atinge 10 metros em 1 segundo, 100 metros em 2 segundos e assim por diante. Nesse caso, o tempo (t) em segundos é sempre o logaritmo decimal da altura (h) em metros.



(Adaptado da revista *Superinteressante*, maio de 2000. p. 86.)

A partir das informações dadas, julgue os itens, assinalando V ou F e justificando:

a) Pode-se representar a relação descrita por meio da função $h = \log t$.

b) Se o foguete pudesse ir tão longe, atingiria 1 bilhão de metros em 9 segundos.

c) Em 2,5 segundos o foguete atinge 550 metros.

10 Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

b) $f(x) = \log_3 (x^2 - 4)$

c) $f(x) = \log_x (-x + 2)$

11 (UC-GO, adaptado) Suponha que o número de peças produzidas por uma indústria aumente mensalmente de acordo com a função $N(t) = 200 \cdot \log_3 (1 + t)$. Nessa função, t é o número de meses contados a partir de um certo período e N é o número de peças produzidas.

a) Quantas peças serão produzidas no segundo mês?

b) Quantos meses serão necessários para que a produção obtida seja o dobro da produção do segundo mês?

12 (FGV-SP) A função $P = 60 \cdot (1{,}04)^t$ representa a estimativa do Produto Interno Bruto em bilhões de dólares (PIB) de um país no ano t adotando-se a seguinte convenção:
t = 0 representa o ano de 1996;
t = 1 representa o ano de 1997;
t = 2 representa o ano de 1998;
e assim por diante. Use a calculadora e responda:

a) Qual é a estimativa do PIB em 2005?
b) Em que ano o PIB será o dobro do que era em 1996? E o triplo?
Em geral, em que ano o PIB será igual ao PIB inicial multiplicado por x?

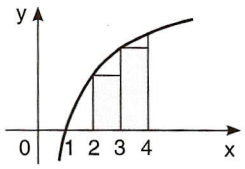
13 Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_3 x$ b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

14 Construa os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = 2 + \log_2 x$ b) $f(x) = \log_2 (x - 1)$

15 (UF-PE) Se a curva ao lado representa o gráfico da função $y = \log_2 x$, $x > 0$, e a é o valor da área sombreada, quanto vale $(2^a)^2$?



Propriedades

Vejamos agora algumas propriedades envolvendo funções logarítmicas.

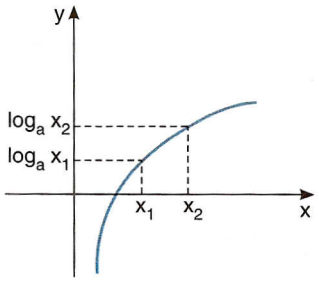
▶ **1ª** Se $a > 1$, então a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é *crescente*.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

De fato, temos:

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2} \underset{a > 1}{\Longleftrightarrow} \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Outro modo de entender essa propriedade: se $a > 1$, então a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem o *mesmo sentido* que a relação entre esses números.



Vejamos alguns exemplos:

$5 > 3 \Rightarrow \log_3 5 > \log_3 3$
$11 > 7 \Rightarrow \log_2 11 > \log_2 7$
$\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \log_{10} \sqrt{2} < \log_{10} 2$
$3 > 0{,}7 \Rightarrow \log_5 3 > \log_5 0{,}7$

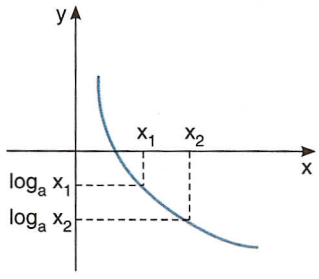
▶ **2ª** Se $0 < a < 1$, então a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é *decrescente*.

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

De fato, temos:

$$x_1 < x_2 \Longleftrightarrow a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2} \underset{0 < a < 1}{\Longleftrightarrow} \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Outro modo de entender essa propriedade: se $0 < a < 1$, então a relação de desigualdade existente entre os logaritmos de dois números positivos tem o *sentido contrário* ao da relação entre esses números.



Vejamos alguns exemplos:

$$3 < 7 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}} 3 > \log_{\frac{1}{3}} 7$$
$$11 > 5 \Rightarrow \log_{0,1} 11 < \log_{0,1} 5$$
$$\sqrt{3} < 2 \Rightarrow \log_{0,2} \sqrt{3} > \log_{0,2} 2$$
$$0,2 < 2,5 \Rightarrow \log_{\frac{3}{5}} 0,2 > \log_{\frac{3}{5}} 2,5$$

▶ **3ª** Se $a > 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos negativos na base a e os números maiores que 1 têm logaritmos positivos na base a.
De fato, se $a > 1$, temos:

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$
$x > 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log 0,75 < 0$$
$$\log_2 0,51 < 0$$
$$\log_7 32 > 0$$
$$\log_2 \sqrt{3} > 0$$

▶ **4ª** Se $0 < a < 1$, então os números positivos menores que 1 têm logaritmos positivos na base a e os números maiores que 1 têm logaritmos negativos na base a.
De fato, se $0 < a < 1$, temos:

$0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > \log_a 1 \Rightarrow \log_a x > 0$
$x > 1 \Rightarrow \log_a x < \log_a 1 \Rightarrow \log_a x < 0$

Vejamos alguns exemplos:

$$\log_{0,3} 0,75 > 0$$
$$\log_{0,5} 0,72 > 0$$
$$\log_{0,2} 16 < 0$$
$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2} < 0$$

Exercícios

16 Assinale *V* ou *F*, justificando:

a) $\log_2 9 > \log_2 \pi^2$

b) $\log_{0,2} 0,1 > \log_{0,2} 2$

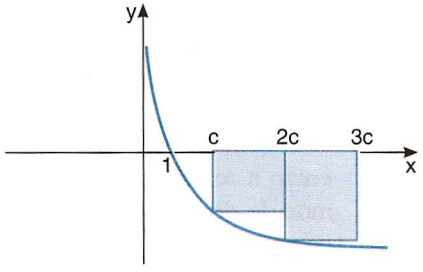
c) $\log_8 5 > 0$

d) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} < 0$

e) $\log \frac{1}{2} < \log \frac{1}{3}$

f) $\ell n \sqrt{3} > \ell n \left(\frac{8}{5}\right)$

17 (UF-MA) A figura ao lado representa o gráfico da função $f(x) = \log_a \left(\frac{1}{x}\right)$.
Mostre que o valor da área hachurada é $-c \cdot (\log_a 2c^2)$ e explique por que esse valor é um número positivo.



7 ○ Equações exponenciais

Há equações que não podem ser reduzidas a uma igualdade de potências de mesma base. A resolução de uma equação desse tipo baseia-se na definição de logaritmo:

$$a^x = b \Rightarrow x = \log_a b$$

com $0 < a \neq 1$ e $b > 0$.

Exemplo 6

Vamos resolver as equações:

a) $2^x = 7$ b) $3^{2x-1} = 5$

a) $2^x = 7 \Rightarrow x = \log_2 7$.

Com o auxílio de uma calculadora, podemos continuar assim:

$$x = \log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} = \frac{0{,}8451}{0{,}3010} \cong 2{,}8$$

b) $3^{2x-1} = 5 \Rightarrow 2x - 1 = \log_3 5 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 + \log_3 5)$

Usando a calculadora, vem:

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log 5}{\log 3}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0{,}6990}{0{,}4771}\right) = \frac{1}{2}(1 + 1{,}465) =$$
$$= 1{,}233$$

Exercícios

18 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $2^x = 3$ c) $3^{-x} = 4$ e) $10^{1-x} = 5$

b) $e^{2x} = 3$ d) $e^{x+1} = 2$ f) $0{,}1^{x+2} = 2$

Sugestão: Se desejar, use a calculadora para obter os valores dos logaritmos.

19 (FGV-SP) Um automóvel vale hoje R$ 20 000,00. Estima-se que seu valor (y) daqui a x anos seja dado pela função exponencial $y = a \cdot b^x$. Sabendo-se que o valor estimado para daqui a 3 anos é R$ 15 000,00:

a) Qual é o valor estimado para daqui a 6 anos?

b) Um outro automóvel tem um valor estimado (y) daqui a x anos, dado por $y = c \cdot (0{,}8)^x$. Daqui a quantos anos o valor deste veículo se reduzirá à metade? Adote o seguinte valor: $\log 2 = 0{,}3$.

20 (UF-BA) O número de bactérias de determinada cultura varia de acordo com a lei $N(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{2}}$, em que o tempo t é dado em horas.
Nessas condições, assinale V ou F nas afirmações seguintes, justificando:

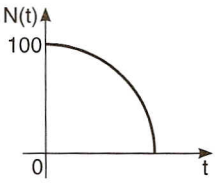
a) No instante $t = 0$, o número de bactérias existentes na cultura é igual a 200.

b) Depois de 8 horas, o número de bactérias existentes na cultura é menor que 7.

c) Em 4 horas, a quantidade de bactérias na cultura se reduz a $\frac{1}{4}$ da quantidade inicial.

d) Na cultura, a quantidade de bactérias se reduz de $\frac{2}{5}$ da quantidade inicial no tempo $t = 2 \log_2 \left(\frac{5}{3}\right)$.

e) Em relação ao tempo, a variação da quantidade de bactérias é representada pelo gráfico ao lado.



21 (FGV-SP) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, sendo e o número de Euler, que vale aproximadamente 2,7.

a) Para que valores de x teremos $f(x) = 1{,}5$?

b) Mostre que o gráfico dessa função é simétrico em relação ao eixo y.

22 (UF-CE) Suponha que o crescimento populacional de duas cidades, A e B, seja descrito pela equação $P(t) = P_0 e^{kt}$, em que:

P_0 é a população no início da observação;

k é a taxa de crescimento populacional na forma decimal;

t é o tempo medido em anos;

e é a base do logaritmo natural;

$P(t)$ é a população t anos após o início da observação.

Se no início de nossa observação a população da cidade A é o quíntuplo da população da cidade B, e se a taxa de crescimento populacional de A permanecer em 2% ao ano e a de B em 10% ao ano, em quantos anos, aproximadamente, as duas cidades possuirão o mesmo número de habitantes? Considere $\ell n\ 5 = 1{,}6$.

8 Equações logarítmicas

Vamos ver como são resolvidos quatro tipos de equações logarítmicas.

▶ **1º** *Equações redutíveis a uma igualdade entre dois logaritmos de mesma base:*

$$\log_a f(x) = \log_a g(x)$$

A solução pode ser obtida impondo-se $f(x) = g(x) > 0$.

Exemplo 7

Vamos resolver a seguinte equação: $\log_2 (2x + 5) = \log_2 7$.

Temos:

$$2x + 5 = 7 \text{ (I) e } 7 > 0 \text{ (II)}$$

$$\text{(I) } 2x + 5 = 7 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$\text{(II) } 7 > 0, \text{ para todo } x \text{ real}$$

Então: $S = \{1\}$.

Exercício

23 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_4 (3x + 2) = \log_4 (2x + 5)$

b) $\log_2 (5x^2 - 14x + 1) = \log_2 (4x^2 - 4x - 20)$

c) $\log_x (x^2 - 5x) = \log_x 6$

▶ **2º** *Equações redutíveis a uma igualdade entre um logaritmo e um número real:*

$$\log_a f(x) = r$$

A solução pode ser obtida impondo-se $f(x) = a^r$.

Exemplo 8

Vamos resolver a seguinte equação: $\log_2 (3x - 1) = 4$.
Temos:

$$\log_2 (3x - 1) = 4 \Rightarrow 3x - 1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 17 \Rightarrow x = \frac{17}{3}$$

Então: $S = \left\{\frac{17}{3}\right\}$.

Exercícios

24 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_3 (2x - 11) = 3$ b) $\log_{\frac{1}{5}} (4 - x) = 0$ c) $\log_{\frac{1}{3}} (2x^2 - 9x + 4) = -2$ d) $\log_x (x + 2) = 2$

25 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_4 (\log_2 x) = 1$ b) $\log_{\frac{1}{3}} [\log_3 (\log_4 x)] = 0$ c) $\log_{\sqrt{2}} \{2 \cdot \log_3 [1 + \log_4 (x + 3)]\} = 2$

▶ **3º** *Equações que são resolvidas por meio de uma mudança de incógnita.*

Exemplo 9

Vamos resolver a equação $(\log_4 x)^2 - 3 \cdot \log_4 x = 4$.
Fazendo $\log_4 x = y$, temos:

$$y^2 - 3y = 4 \Rightarrow y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow y = -1 \text{ ou } y = 4$$

Assim, vem:

$$\log_4 x = -1 \text{ ou } \log_4 x = 4$$

$$x = 4^{-1} = \frac{1}{4} \text{ ou } x = 4^4 = 256$$

Então: $S = \left\{\frac{1}{4}, 256\right\}$.

Exercício

26 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_2^2 x - 7 \log_2 x + 6 = 0$ b) $2 \log_4^2 x + 2 = 5 \log_4 x$ c) $\log x (\log x - 1) = 12$

▶ **4º** *Equações que envolvem utilização de propriedades ou de mudança de base.*

Exemplo 10

Vamos resolver a equação $\frac{\log_2 x^2}{\log_2 2x} = 3$.

$$\frac{\log_2 x^2}{\log_2 2x} = 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot \log_2 x}{\log_2 2 + \log_2 x} = 3 \overset{(\log_2 x = y)}{\Rightarrow} \frac{2y}{1 + y} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = 3 + 3y \Rightarrow y = -3 \Rightarrow \log_2 x = -3 \Rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

Então: $S = \left\{\frac{1}{8}\right\}$.

Exemplo 11

Vamos resolver a equação $\log (2x + 3) + \log (x + 2) = 2 \log x$.
Essa equação equivale a:

$$\log [(2x + 3)(x + 2)] = \log x^2$$

e daí vem:

$$(2x + 3)(x + 2) = x^2$$
$$2x^2 + 7x + 6 = x^2$$
$$x^2 + 7x + 6 = 0$$
$$x = -1 \text{ ou } x = -6$$

- $x = -1$ não pode ser aceito, pois não existe $\log x$.
- $x = -6$ também não, pois não existem $\log x$, $\log (2x + 3)$ e $\log (x + 2)$.

Então, a equação não tem solução, ou $S = \varnothing$.

Exemplo 12

Vamos resolver a equação $\log_3 x + \log_x 3 = -2$.

Fazendo $\log_3 x = y$, temos $\log_x 3 = \dfrac{1}{\log_3 x} = \dfrac{1}{y}$

e a equação proposta fica:

$$y + \frac{1}{y} = -2$$

e daí vem:

$$y^2 + 1 = -2y \Rightarrow y^2 + 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

- $x = \dfrac{1}{3}$ é a solução, pois existem $\log_x 3$ e $\log_3 x$.

Assim: $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

Exercícios

27 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_3 (x + 1) + \log_3 (x - 1) = 1$
b) $\log_2 (3x + 5) - \log_2 (2x - 1) = 3$
c) $3 \log (x - 1) = \log (x^3 + 3x - 7)$

28 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_2 (5x - 2) - \log_2 x - \log_2 (x - 1) = 2$
b) $\log_2 (x + 4) + \log_2 (x - 3) = \log_2 18$
c) $2 \log x = \log 2 + \log (x + 4)$

29 Define-se *cologaritmo de* ***a*** *na base* ***b*** como o oposto do logaritmo de a na mesma base, isto é: $\operatorname{colog}_b a = -\log_b a$.
Resolva a equação $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 13x) + \operatorname{colog}_{\frac{1}{3}} (x + 3) = \log_{\frac{1}{3}} (3x - 1)$.

30 (EEM-SP) Resolva o sistema: $\begin{cases} y - x = 9 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$.

31 (U. F. Ouro Preto-MG) Resolva o sistema $\begin{cases} 2^x \cdot 8^y = 32 \\ \log_8 xy = \dfrac{1}{3} \end{cases}$.

32 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$

b) $\log_3^2 x - 5 \log_9 x + 1 = 0$

c) $\log_2 x = \log_x 2$

33 (U. F. Ouro Preto-MG) Resolva a equação logarítmica:

$$(\log_2 8)(\log_8 (2 - x)) + \log_2 (1 - x) = 2 + 2(\log_4 3).$$

34 (UF-PA) Encontre a solução real da equação $\log (1 + 5^{x-1}) + \log 5^{x-1} = \dfrac{1}{\log_2 10}$.

35 (Unicamp-SP) As populações de duas cidades, *A* e *B*, são dadas em milhares de habitantes pelas funções $A(t) = \log_8 (1 + t)^6$ e $B(t) = \log_2 (4t + 4)$ em que a variável *t* representa o tempo em anos.

a) Qual é a população de cada uma das cidades nos instantes $t = 1$ e $t = 7$?

b) Após certo instante *t*, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante *t* e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.

36 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $\dfrac{1}{3} + \log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 4$

b) $\log_2 \sqrt[4]{x} = \log_4 \sqrt{x}$

37 (UF-MT) Resolva em $\mathbb{R}$ a equação: $\log_x (1 - |x|) = 1$.

38 (Unicamp-SP) Resolva, em $\mathbb{R}$, o sistema $\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4 \\ x \cdot y = 8 \end{cases}$.

9 ○ Inequações exponenciais

Há inequações exponenciais que não podem ser reduzidas a uma desigualdade de potências de mesma base. A resolução de uma inequação desse tipo baseia-se no crescimento (quando a base é maior que 1) ou no decrescimento (quando a base está entre 0 e 1) da função logarítmica.

Assim:

$$a^x > b \Leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \Leftrightarrow x > \log_a b \text{ (se } a > 1)$$

$$a^x > b \Leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \Leftrightarrow x < \log_a b \text{ (se } 0 < a < 1)$$

$$a^x < b \Leftrightarrow \log_a a^x < \log_a b \Leftrightarrow x < \log_a b \text{ (se } a > 1)$$

$$a^x < b \Leftrightarrow \log_a a^x > \log_a b \Leftrightarrow x > \log_a b \text{ (se } 0 < a < 1)$$

Exemplo 13

Vamos resolver as seguintes inequações:

a) $2^x > 7$ b) $5^{2x-1} \leq 4$

a) $2^x > 7 \Rightarrow \log_2 2^x > \log_2 7 \Rightarrow x > \log_2 7$

Com auxílio de calculadora, prosseguimos:

$$x > \frac{\ell n\ 7}{\ell n\ 2} \Rightarrow x > \frac{1,9459}{0,6931} \Rightarrow x > 2,8$$

b) $5^{2x-1} \leq 4 \Rightarrow \log_5 5^{2x-1} \leq \log_5 4 \Rightarrow 2x - 1 \leq \log_5 4 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}(1 + \log_5 4)$

Com auxílio de calculadora, avançamos:

$$x \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log 4}{\log 5}\right) \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{0,6020}{0,6989}\right) \Rightarrow x \leq 0,93$$

Exercício

39 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $3^x > 7$ b) $4^x < 3$ c) $\left(\frac{1}{e}\right)^x < 4$ d) $(0,4)^x \leq 2$ e) $2^{3x+1} \geq 5$

10 ○ Inequações logarítmicas

Vamos ver como são resolvidos três tipos de inequações logarítmicas.

▶ **1º** *Inequações redutíveis a uma desigualdade entre logaritmos de mesma base.*

$$\log_a f(x) < \log_a g(x)$$

Aqui há dois casos a considerar:

- A base é maior que 1. Nesse caso, a relação de desigualdade entre f(x) e g(x) tem o mesmo sentido que a desigualdade entre os logaritmos. Para existirem os logaritmos, devemos impor também que f(x) e g(x) sejam positivos. Então, a solução pode ser obtida impondo-se que:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow 0 < f(x) < g(x)$$

- A base está entre 0 e 1. Nesse caso, a relação de desigualdade entre f(x) e g(x) tem sentido contrário ao da desigualdade entre os logaritmos. Para existirem os logaritmos, devemos impor também que f(x) e g(x) sejam positivos. Então, a solução pode ser obtida impondo-se que:

$$\log_a f(x) < \log_a g(x) \Rightarrow f(x) > g(x) > 0$$

Exemplo 14

Vamos resolver a inequação $\log_3 (3x - 2) \leq \log_3 x$.
Condições: $0 < 3x - 2 \leq x$.
Daí vem:

- $0 < 3x - 2 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$ (I)
- $3x - 2 \leq x \Rightarrow 2x \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$ (II)

Da interseção de (I) com (II), resulta:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x \leq 1\right\}$$

Exemplo 15

Vamos resolver a inequação $\log_2 (x^2 - 5x) > \log_2 (x - 5)$.
Condições: $x^2 - 5x > x - 5 > 0$.
Daí vem:

- $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$ (I)
- $x^2 - 5x > x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 > 0 \Rightarrow x < 1$ ou $x > 5$ (II)

Da interseção de (I) com (II), vem:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$$

Exemplo 16

Vamos resolver a inequação $\log_{\frac{1}{4}} 2x^2 < \log_{\frac{1}{4}} (x + 1)$.
Condições: $2x^2 > x + 1 > 0$.
Daí vem:

- $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$ (I)
- $2x^2 > x + 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}$ ou $x > 1$ (II)

Da interseção de (I) com (II), segue:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 1\right\}$$

▶ **2º** *Inequações redutíveis a uma desigualdade entre um logaritmo e um número real.*

$$\log_a f(x) > r \quad \text{ou} \quad \log_a f(x) < r$$

Para resolver uma inequação desse tipo, basta substituir r por $\log_a a^r$; assim, recaímos numa inequação do 1º tipo.

$$\log_a f(x) < r \text{ equivale a } \log_a f(x) < \log_a a^r$$
$$\log_a f(x) > r \text{ equivale a } \log_a f(x) > \log_a a^r$$

Exemplo 17

Vamos resolver a inequação $\log_3 (4x - 1) < 3$.
Temos:

$$\log_3 (4x - 1) < 3 \Rightarrow \log_3 (4x - 1) < \log_3 3^3 \Rightarrow 0 < 4x - 1 < 27 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 < 4x < 28 \Rightarrow \frac{1}{4} < x < 7$$

Então: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < 7\right\}$.

Exemplo 18

Vamos resolver a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 7x) > -3$.
Temos:

$$\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 7x) > -3 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 7x) > \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \Rightarrow 0 < x^2 + 7x < 8$$

De $x^2 + 7x > 0$, vem $x < -7$ ou $x > 0$ (I).
De $x^2 + 7x < 8$, vem $x^2 + 7x - 8 < 0$ e daí $-8 < x < 1$ (II).
Fazendo a interseção de (I) com (II), resulta:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < -7 \text{ ou } 0 < x < 1\}$$

Exercícios

40 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes inequações:

a) $\log_3 x > \log_3 5$

b) $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 3$

c) $\log_3 (5x - 2) \leq \log_3 7$

d) $\log_2 x > 3$

e) $\log_{\frac{1}{3}} x > 1$

41 (UA-AM) Resolva a inequação em $\mathbb{R}$: $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 - 5x + 8) < -1$.

42 Estabeleça o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \sqrt{\log_2 (-x + 1)}$

b) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\log_{\frac{1}{3}} (x^2 - 1)}}$

43 Determine m de modo que a equação de 2º grau (na variável x) $x^2 - 4x + \log_2 m = 0$ apresente duas raízes reais e distintas.

44 Resolva, em $\mathbb{R}$:

a) $2(\ell n\ x)^2 - \ell n\ x > 6$

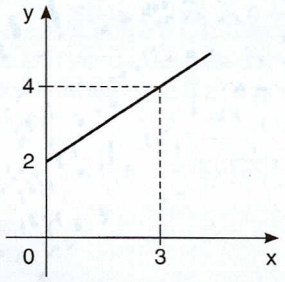
b) $\log^2_{\frac{1}{3}} x + 3 \log_{\frac{1}{3}} x < 10$

45 (U. F. Juiz de Fora-MG) Qual é o conjunto solução da inequação $\ell n\ (x^2 - 2x - 7) < 0$?

46 Para que valores reais de m a equação $-x^2 + (\log_3 m)x - \dfrac{1}{4} = 0$, na variável x, apresenta duas raízes reais?

Testes de vestibulares

1 (Unirio-RJ)



Consideremos a função inversível f cujo gráfico é visto acima. A lei que define f^{-1} é:

a) $y = 3x + \dfrac{3}{2}$

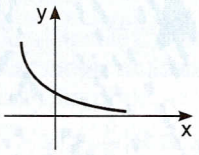
b) $y = 2x - \dfrac{3}{2}$

c) $y = \dfrac{3}{2} x - 3$

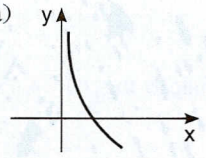
d) $y = \dfrac{2}{3} x + 2$

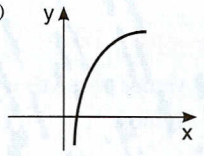
e) $y = -2x - \dfrac{3}{2}$

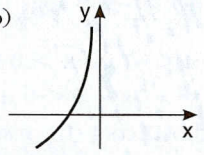
2 (Fafi-MG) Se o gráfico de f é

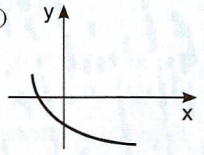


, então o gráfico da inversa de f é:

a)


c)


b)


d)


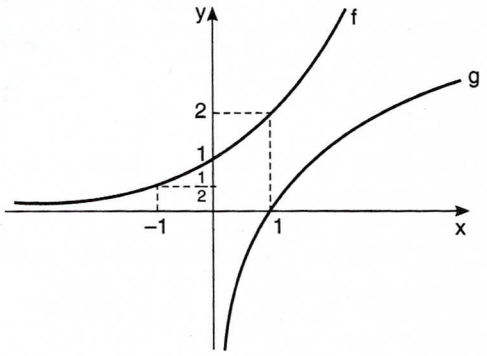
3 (U. F. São Carlos-SP) A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira, evolui, desde que é plantada, segundo o modelo matemático:

$$h(t) = 1{,}5 + \log_3(t + 1),$$

com h(t) em metros e t em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo (em anos) transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de:

a) 9 c) 5 e) 2
b) 8 d) 4

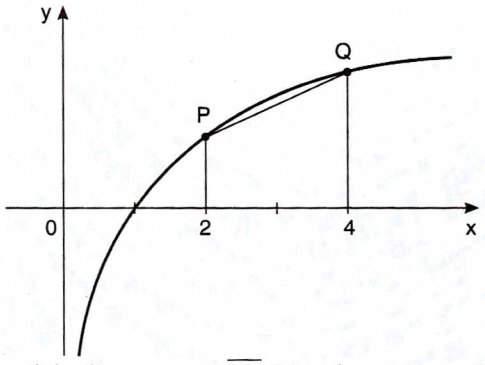
4 (Unifor-CE) Na figura abaixo têm-se os gráficos da função exponencial f e de sua inversa g.



O valor de k tal que g(k) = 3 é:

a) 2 c) 4 e) 8
b) 3 d) 6

5 (UFF-RJ) A figura representa o gráfico da função f definida por $f(x) = \log_2 x$.

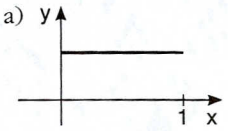


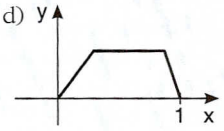
A medida do segmento $\overline{PQ}$ é igual a:

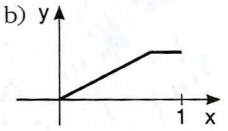
a) $\sqrt{6}$ c) $\log_2 5$ e) log 2
b) $\sqrt{5}$ d) 2

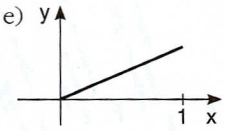
6 (Unifesp-SP) Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade "a valores distintos de x correspondem valores distintos de y". Tais funções são chamadas injetoras.

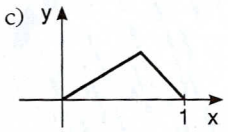
Qual, dentre as funções cujos gráficos aparecem abaixo, é injetora?

a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

7 (PUC-RS) Se $f(x) = \log x$, então $f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x)$ é igual a:

a) 10 c) $-f(x)$ e) 0
b) $f(x^2)$ d) 1

8 (Cefet-PR) Se a e b são soluções do sistema:

$$\begin{cases} 2^x = \dfrac{1}{2^{y-10}} \\ \log_2 x + \log_2 y = 4 \end{cases}, \text{ então}$$

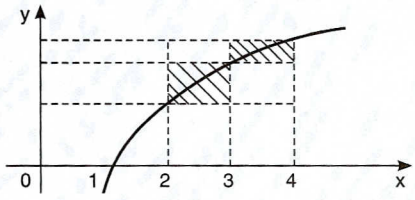
$2^a + 2^b$ é igual a:

a) 64 c) 514 e) 80
b) 260 d) 136

9 (UF-AL) A expressão $N(t) = 1500 \cdot 2^{0,2t}$ permite o cálculo do número de bactérias existentes em uma cultura, ao completar t horas do início de sua observação (t = 0). Após quantas horas da primeira observação haverá 250000 bactérias nessa cultura?
Dados: log 2 = 0,30; log 3 = 0,48.

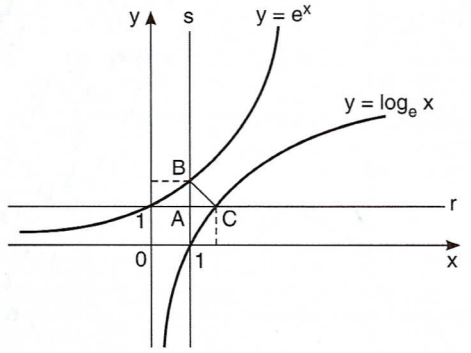
a) 37 c) 30 e) 25
b) 35 d) 27

10 (Fuvest-SP) A curva da figura que segue representa o gráfico da função $y = \log_{10} x$, para $x > 0$. Assim sendo, a área da região hachurada, formada pelos dois retângulos, é:



a) $\log_{10} 2$ c) $\log_{10} 4$ e) $\log_{10} 6$
b) $\log_{10} 3$ d) $\log_{10} 5$

11 (U. F. Uberlândia-MG) No sistema de coordenadas cartesianas considere os gráficos das funções $y = e^x$ e $y = \log_e x$, como mostra a figura abaixo. Considerando r // Ox e s // Oy, construímos o triângulo ABC. Assim, pode-se afirmar que a área desse triângulo, em unidades de área, é:



a) $\frac{1}{2}(e^2 - 1)$ c) $\frac{1}{2}e^2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}(e - 1)^2$ d) $\frac{1}{2}(e - 1)^2$

12 (Unimes-SP) Determine os valores de x que verificam a desigualdade:

$$\frac{1}{3} < \log_8 5x < 1$$

a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{8}{5}\right\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < \frac{8}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3}{8} < x < 1\right\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x < 1\right\}$

13 (Cefet-MG) A solução x da equação $\log_2 (16x^2) = 4 \log_2 x + 3$ satisfaz:

a) $x < 0$ d) $2 \leqslant x \leqslant 4$

b) $0 < x < 1$ e) $x > 4$

c) $1 < x < 2$

14 (UF-MG) O conjunto de todos os valores reais de x que satisfazem a equação $2 \log_{10} x = 1 + \log_{10}\left(x + \frac{11}{10}\right)$ é:

a) $\{-1, 11\}$ c) $\{10\}$

b) $\{5, 6\}$ d) $\{11\}$

15 (Ucsal-BA) Se o número real m é solução da equação $\log (x + 2) + \log (x - 2) - \log (3x + 2) = \log 3$, então m é um número:

a) múltiplo de 10. d) menor que 5.

b) divisível por 3. e) primo.

c) maior que 12.

16 (UF-SE) Se $\log (5x) - 4 \cdot \log 5 = -3$, então x é igual a:

a) 0,025 c) 0,25 e) 2,5

b) 0,125 d) 1,25

17 (Mackenzie-SP) Supondo $\log 2 = 0{,}3$, o valor mais próximo de x tal que $2^{-2x} - 0{,}32 = 0$ é:

a) $\frac{2}{5}$ c) 5 e) $\frac{1}{5}$

b) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{1}{4}$

18 (Unificado-RJ) O conjunto solução da equação $\log_4 x + \log_x 4 = \frac{5}{2}$ sendo $U = \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ é tal que a soma de seus elementos é igual a:

a) 0 c) 14 e) 18

b) 2 d) 16

19 (U. F. Ouro Preto-MG) A soma das raízes da equação $1 + \log_2 (1 + x^2) = \log_2 5 + \log_2 x$ é igual a:

a) 1 c) $\frac{5}{2}$ e) 5

b) $\frac{3}{2}$ d) 3

20 (Mackenzie-SP) Se $\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} = 2$, x^2 vale:

a) 81 d) 100

b) 16 e) 25

c) 36

21 (Fuvest-SP) Se (x, y) é solução do sistema $\begin{cases} 2^x \cdot 4^y = \frac{3}{4} \\ y^3 - \frac{1}{2}xy^2 = 0 \end{cases}$, pode-se afirmar que:

a) $x = 0$ ou $x = -2 - \log_2 3$

b) $x = 1$ ou $x = 3 + \log_2 3$

c) $x = 2$ ou $x = -3 + \log_2 3$

d) $x = \frac{\log_2 3}{2}$ ou $x = -1 + \log_2 3$

e) $x = -2 + \log_2 3$ ou $x = -1 + \frac{\log_2 3}{2}$

Desafios

1

Algas tóxicas na água

Depois da chuva, surge uma nova vilã da água fornecida pela Cedae: a alga *Anabaena*. Análises de amostras coletadas pela Feema na água bruta e tratada do Guandu, segunda e terça-feira passadas, identificaram a presença dessas algas potencialmente tóxicas, pertencentes ao grupo das cianobactérias. O secretário estadual de Meio Ambiente, André Corrêa, assegura, no entanto, que a quantidade encontrada está bem abaixo dos limites tolerados pelo organismo, não causando riscos à saúde. Segundo ele, a presença de algas explica o mau cheiro (semelhante ao do inseticida BHC) e o gosto ruim na água.

— Como identificamos as algas antes de o Guandu receber a água do rio dos Poços, concluímos que o problema ocorre com a água captada do rio Paraíba do Sul. Acreditamos que as algas tenham-se proliferado no reservatório de Funil (em Itatiaia, na divisa com São Paulo), que armazena a água do Paraíba do Sul — disse Corrêa.

[...]

• A explicação do secretário é que o reservatório teria ficado baixo em função da estiagem — a maior dos últimos 40 anos — e as algas teriam sido sugadas para o Guandu. A Feema, segundo ele, encontrou nas amostras até 2 mil células por mililitro de água (o padrão considerado preocupante é a partir de 20 mil células por mililitro). A partir de 10 mil células, o nível é tido como de vigilância.

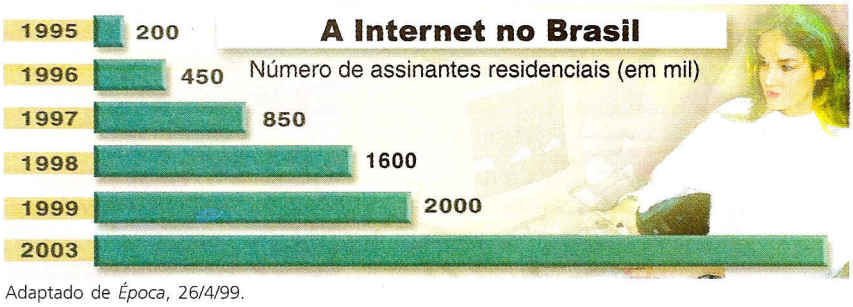
(*O Globo*, 17/11/2001.)

Márcia Foletto/O Globo

Se nenhuma providência tivesse sido tomada pelas autoridades sanitárias do Rio de Janeiro, acreditava-se que a população de algas pudesse se proliferar à taxa de 8% por semana.
A partir da data em que foram encontradas 2 mil células por mℓ de água, determine:

a) o tempo necessário para que as autoridades entrassem em vigilância;
b) o tempo necessário para que se entrasse no padrão "preocupante".

2 (UnB-DF) O gráfico abaixo ilustra o número de assinantes residenciais da Internet no Brasil, em milhares, nos últimos cinco anos.



Adaptado de *Época*, 26/4/99.

A partir desses dados, é importante obter um modelo matemático capaz de estimar o número de assinantes residenciais da Internet no Brasil em datas diferentes das fornecidas. Para isso, aproxima-se o número anual de assinantes, em milhares, por uma função exponencial do tipo

$$F(t) = A\ e^{k(t\ -\ 1998)},$$

em que t é o ano, $e = 2{,}718\ldots$ é a base do sistema neperiano de logaritmos, A e k são constantes a serem determinadas.

Considerando que $F(1998) = 1\,600$ e $F(1999) = 2\,000$, calcule, *em centenas de milhares*, a estimativa do número de assinantes no ano de 2003, desprezando a parte fracionária de seu resultado, caso exista.

3 (Vunesp-SP) O corpo de uma vítima de assassinato foi encontrado às 22 horas. Às 22h30min o médico da polícia chegou e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de 32,5 °C. Uma hora mais tarde, tomou a temperatura outra vez e encontrou 31,5 °C. A temperatura do ambiente foi mantida constante a 16,5 °C. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva seja 36,5 °C e suponha que a lei matemática que descreve o resfriamento do corpo é dada por

$$D(t) = D_0 \cdot 2^{(-2\alpha t)}$$

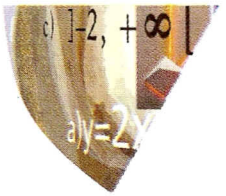
em que t é o tempo em horas, D_0 é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente no instante $t = 0$, $D(t)$ é a diferença de temperatura do cadáver com o meio ambiente num instante t qualquer e α é uma constante positiva. Os dados obtidos pelo médico foram colocados na tabela seguinte:

	Hora	Temperatura do corpo (°C)	Temperatura do ambiente (°C)	Diferença de temperatura (°C)
$t = ?$	morte	36,5	16,5	$D(t) = 20$
$t = 0$	22h30min	32,5	16,5	$D(0) = D_0 = 16$
$t = 1$	23h30min	31,5	16,5	$D(1) = 15$

Considerando os valores aproximados $\log_2 5 = 2{,}3$ e $\log_2 3 = 1{,}6$, determine:

a) a constante α;

b) a hora em que a pessoa morreu.



9 PROGRESSÕES

1 Seqüências numéricas

Vamos pensar nos anos bissextos que virão a partir do ano 2000. Eles formam uma seqüência ou sucessão:

Uma seqüência numérica é um conjunto ordenado de números. No exemplo, 2000 é o primeiro termo da seqüência, 2004 é o segundo termo, e assim sucessivamente.

Costuma-se indicar o primeiro termo de uma seqüência por a_1, o segundo termo por a_2, e assim por diante. Dessa forma, uma seqüência de n elementos é indicada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$$

Há situações em que a seqüência é infinita, e a representaremos por $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$.

Em nosso estudo, os elementos das seqüências serão sempre *números reais*.

Formação dos elementos de uma seqüência

Os elementos de uma seqüência podem ser determinados através de uma *lei de formação*. Observe os exemplos.

Exemplo 1

Vamos determinar os cinco primeiros termos da seqüência definida por:

$$a_n = 4n^2 - 2,\ n \in \mathbb{N}^*$$

a_n representa o termo que ocupa a n-ésima posição na seqüência, em que n = 1, 2, 3, ... Por esse motivo, a_n é chamado *termo geral* da seqüência.

Atribuindo valores permitidos para n, encontramos os termos procurados:

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = 4 \cdot 1^2 - 2 \Rightarrow a_1 = 2$$
$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 4 \cdot 2^2 - 2 \Rightarrow a_2 = 14$$
$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 4 \cdot 3^2 - 2 \Rightarrow a_3 = 34$$
$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 4 \cdot 4^2 - 2 \Rightarrow a_4 = 62$$
$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 4 \cdot 5^2 - 2 \Rightarrow a_5 = 98$$
$$\vdots$$

Assim, a seqüência procurada é (2, 14, 34, 62, 98, ...).

Exemplo 2

Consideremos a seqüência definida por $a_n = 2n - 7$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Podemos descobrir o valor de a_5:

$$a_5 = 2 \cdot 5 - 7 = 3$$

Se quisermos saber se o número 83 pertence à seqüência, devemos substituir a_n por 83 e verificar se a equação obtida tem solução natural:

$$83 = 2n - 7 \Rightarrow 2n = 90 \Rightarrow n = 45$$

Concluímos, então, que o número 83 pertence à seqüência e ocupa a 45ª posição.

Outra maneira de determinarmos os elementos de uma seqüência é através da *lei de recorrência*. Essa lei nos permite encontrar um termo qualquer da seqüência a partir do termo anterior.

Exemplo 3

Vamos construir a seqüência definida pelas relações:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n + 3,\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \text{(I)}$$

Determinaremos o 2º termo a partir do 1º; o 3º a partir do 2º, e assim por diante. Para isso, basta atribuirmos valores para n em (I):

$$\begin{aligned} n = 1 &\Rightarrow a_2 = a_1 + 3 \Rightarrow a_2 = 7 + 3 \Rightarrow a_2 = 10 \\ n = 2 &\Rightarrow a_3 = a_2 + 3 \Rightarrow a_3 = 10 + 3 \Rightarrow a_3 = 13 \\ n = 3 &\Rightarrow a_4 = a_3 + 3 \Rightarrow a_4 = 13 + 3 \Rightarrow a_4 = 16 \\ n = 4 &\Rightarrow a_5 = a_4 + 3 \Rightarrow a_5 = 16 + 3 \Rightarrow a_5 = 19 \end{aligned}$$

Assim, a seqüência procurada é (7, 10, 13, 16, 19, ...).

Exercícios

1 Escreva os cinco primeiros termos da seqüência definida por $a_n = 2n + 3$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2 A respeito da seqüência dada por $a_n = \frac{1}{2 + n^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$, determine:

a) $a_5 + a_4$

b) a posição do elemento $\frac{1}{123}$ dessa seqüência

3 Considere a seqüência definida por: $a_n = -43 + 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Qual é o valor da soma de seus 3 primeiros termos?
b) Qual seu primeiro termo positivo? Que posição esse termo ocupa na seqüência?

4 Uma seqüência é definida pela seguinte relação de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ a_{n+1} = a_n - 2 \end{cases}$$

Escreva os 6 primeiros termos dessa seqüência.

5 Determine o 8º termo da seqüência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 1;\ a_2 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2};\ n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geqslant 3 \end{cases}$$

6 (Covest-PE) Sobre os números da seqüência $a_n = n^5 - n$, $n \in \mathbb{N}^*$, analise as seguintes afirmações:

a) São múltiplos de 3.
b) Não podem ser múltiplos de 7.
c) Não são primos.

7 (UF-RN) Uma pessoa que pesa 140 quilos submete-se a um regime alimentar, obtendo o seguinte resultado: nas quatro primeiras semanas, perde 3 quilos por semana; nas quatro seguintes, 2 quilos por semana; daí em diante, apenas $\frac{1}{2}$ quilo por semana.

Calcule em quantas semanas a pessoa estará pesando:

a) 122 quilos. b) 72 quilos.

2 ○ Progressões Aritméticas

Observe a seqüência:

$$(4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots)$$

Notemos que a diferença entre um termo qualquer dessa seqüência e seu antecedente é sempre igual a 3:

$$7 - 4 = 3;\ 10 - 7 = 3;\ 13 - 10 = 3;$$
$$16 - 13 = 3;\ 19 - 16 = 3;\ \ldots$$

Definição

Progressão Aritmética (P.A.) é uma seqüência de números reais em que a *diferença entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre a mesma (constante).*

Essa constante é chamada *razão* da P.A. e é indicada por *r.*

Vejamos alguns exemplos:

1. Na P.A. $(3, 6, 9, 12, \ldots)$ temos $r = 3$.
2. Na P.A. $\left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, \ldots\right)$ temos $r = -\frac{1}{2}$.
3. Na P.A. $(-6, -1, 4, 9, \ldots)$ temos $r = 5$.
4. Na P.A. $(5, 5, 5, 5, \ldots)$ temos $r = 0$.
5. Na P.A. $(23, 20, 17, 14, \ldots)$ temos $r = -3$.

De acordo com o sinal da razão, podemos classificar as Progressões Aritméticas da seguinte forma:

a) Quando $r > 0$, dizemos que a P.A. é *crescente*, como nos exemplos 1 e 3.
b) Quando $r < 0$, dizemos que a P.A. é *decrescente*, como nos exemplos 2 e 5.
c) Quando $r = 0$, todos os termos da P.A. são iguais; nesse caso, dizemos que ela é *constante*, como no exemplo 4.

3 ○ Termo geral da P.A.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.A., conhecendo apenas o 1º termo e a razão.

Isso é possível graças à obediência dos termos de uma P.A. a uma regra especial de formação.

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma P.A. de razão *r*. Temos:

- $a_2 - a_1 = r \Rightarrow a_2 = a_1 + r$
- $a_3 - a_2 = r \Rightarrow a_3 = a_2 + r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r$
- $a_4 - a_3 = r \Rightarrow a_4 = a_3 + r \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$

⋮ ⋮ ⋮

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na seqüência, é dado por:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Essa expressão, conhecida como *fórmula do termo geral da P.A.*, permite-nos conhecer qualquer termo da P.A. em função de a_1 e r. Assim, por exemplo, podemos escrever:

$$a_9 = a_1 + 8r; \quad a_{15} = a_1 + 14r; \quad a_{26} = a_1 + 25r$$

e assim por diante.

Exemplo 4

Vamos calcular o 50º termo da P.A. (–3, 1, 5, 9, ...).
Sabemos que $a_1 = -3$ e $r = 1 - (-3) = 4$.
Utilizando a expressão do termo geral, podemos escrever:

$$a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = (-3) + 49 \cdot 4 \Rightarrow a_{50} = 193$$

Exemplo 5

Vamos determinar a P.A. que possui as seguintes características: o 10º termo vale 48 e a soma do 5º com o 20º termo é igual a 121.

De acordo com o enunciado, temos:

$$\begin{cases} a_{10} = 48 \\ a_5 + a_{20} = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 9r = 48 \\ (a_1 + 4r) + (a_1 + 19r) = 121 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 9r = 48 \\ 2a_1 + 23r = 121 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, segue $r = 5$ e $a_1 = 3$.
Assim, a P.A. pedida é (3, 8, 13, 18, 23, ...).

Exemplo 6

Vamos encontrar o primeiro termo negativo da P.A. (37, 35, 33, ...).
Sabemos que $a_1 = 37$ e $r = -2$.
O termo geral da P.A. é $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$.
Então:

$$a_n = 37 + (n - 1)(-2) \Rightarrow a_n = 37 - 2n + 2 \Rightarrow a_n = 39 - 2n$$

Agora podemos saber qual é o 1º termo negativo da P.A.

Façamos $a_n < 0$, isto é, $39 - 2n < 0 \Rightarrow n > \frac{39}{2} \Rightarrow n > 19{,}5$.

Como n é natural, concluímos que o 1º termo negativo da P.A. é o 20º, cujo valor é:

$$a_{20} = 37 + 19(-2) \Rightarrow a_{20} = -1$$

Exemplo 7

Determinemos x de modo que a seqüência $(x^2 + 1, x + 2, 4x)$ seja uma P.A.

Em qualquer P.A. (a_1, a_2, a_3), $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, isto é, o termo central é dado pela *média aritmética* entre os outros dois termos.

Assim,

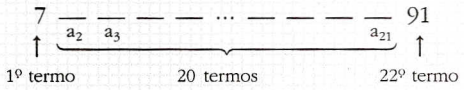
$$x + 2 = \frac{(x^2 + 1) + (4x)}{2} \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

As raízes dessa equação são $x = 1$ ou $x = -3$.
Podemos verificar que, para $x = 1$, a P.A. é (2, 3, 4) e, para $x = -3$, a P.A. é (10, –1, –12).

Exemplo 8

Vamos interpolar 20 meios aritméticos entre 7 e 91.

"Interpolar" ou inserir 20 meios aritméticos entre 7 e 91 significa determinar 20 números reais de modo que se tenha uma P.A. em que $a_1 = 7$ e $a_{22} = 91$ e os vinte números sejam a_2, a_3, ..., a_{21}, como mostra o esquema abaixo:



Daí:

$$a_{22} = a_1 + 21 \cdot r$$
$$91 = 7 + 21 \cdot r$$
$$21r = 84 \Rightarrow r = 4$$

Assim, a seqüência procurada é (7, 11, 15, ..., 87, 91).

Exemplo 9

Vamos descobrir quantos múltiplos de 3 existem entre 200 e 400.

A seqüência dos múltiplos de 3 é uma P.A. de razão 3. O que nos interessa é estudar essa seqüência entre 200 e 400.

Para isso, temos:

- o primeiro múltiplo de 3 maior que 200 é $a_1 = 201$;
- o último múltiplo de 3 pertencente ao intervalo dado é 399, que indicaremos por a_n, pois não conhecemos sua posição na seqüência. Assim, $a_n = 399$.

Retomando, queremos determinar o número de termos (n) da seqüência (201, 204, ..., 399). Pelo termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 399 = 201 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n = 67$$

Portanto, há 67 múltiplos de 3 entre 200 e 400.

Exercícios

8 Determine a razão de cada uma das seguintes progressões aritméticas e, em seguida, classifique-as em crescente, decrescente ou constante:

a) (13, 17, 21, 25, ...)

b) (40, 35, 30, 25, 20, ...)

c) (–7, –7, –7, ...)

d) (–4, –10, –16, –22, ...)

e) $\left(\frac{1}{2}, 3, \frac{11}{2}, 8, \ldots\right)$

f) (–7, –1, 5, 11, ...)

9 Qual é o 10º termo da P.A. (43, 55, 67, 79, ...)?

10 Qual é o 72º múltiplo positivo de 3?

11 Considere a seqüência dos números naturais que são múltiplos *positivos* de 4.

a) Escreva o termo geral dessa seqüência.

b) Qual é o seu 50º termo?

12 Numa P.A., o primeiro termo é –12 e o décimo quinto termo é 30. Qual é o quarto termo?

13 Dada a P.A. (–51, –47, –43, ...), determine:

a) seu termo geral.
b) o 40º termo.
c) seu primeiro termo positivo.

14 (Mackenzie-SP) Numa progressão aritmética de 7 termos, $a_7 = 3a_1$ e o termo central é 6. Qual é a razão da progressão?

15 Escreva a P.A. em que $a_1 + a_3 + a_4 = 0$ e $a_6 = 40$.

16 Dado um quadrado Q_1 de lado $\ell = 1$ cm, considere a seqüência de quadrados $\{Q_1, Q_2, Q_3, ...\}$, em que o lado de cada quadrado é 2 cm maior que o lado do quadrado anterior.
Determine:

a) o perímetro de Q_{20}.
b) a área de Q_{31}.
c) a diagonal de Q_{10}.

17 Um banco financiou um lançamento imobiliário nas seguintes condições: em janeiro, aprovou crédito para 236 pessoas; em fevereiro, para 211; em março aprovou mais 186 nomes, e assim por diante.
Quantas pessoas tiveram seu crédito aprovado em junho?

18 Dada a seqüência $(2^x, 2^{x+1}, 3 \cdot 2^x, 2^{x+2}, ...)$:

a) *Se ela representar uma PA*, calcule sua razão.
b) Determine x a fim de que seu oitavo termo valha 32.

19 Determine m a fim de que a seqüência $(m - 14, 2m + 2, m^2)$ seja uma P.A.

20 Determine x para que a seqüência $(\log_2 (x - 2), \log_2 4x, \log_2 32x)$ seja uma P.A.

21 As medidas que exprimem a diagonal, o lado e a área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.A.? Em caso afirmativo, qual é a razão da P.A.?

22 Qual é o número de termos da P.A. (53, 62, 71, ..., 305)?

23 Interpole seis meios aritméticos entre –22 e 20.

24 Quantos meios aritméticos devem ser inseridos entre 15 e 160, de modo que a razão da interpolação seja igual a 5?

25 Quantos números inteiros x, tais que $23 \leqslant x \leqslant 432$, *não* são múltiplos de 3?

26 (UF-RJ) Os números a, b e c são tais que seus logaritmos decimais log a, log b e log c, nesta ordem, estão em progressão aritmética.
Sabendo que log b = 2, determine o produto abc.

4 ○ Notação especial

Muitas vezes desejamos determinar uma P.A. a partir de informações sobre seus elementos.

Como já vimos, pela definição de P.A. podemos encontrar uma representação conveniente que nos facilite a resolução de alguns problemas.

- Para três termos em P.A., podemos escrever:

$$(x - r,\ x,\ x + r)$$

- Para cinco termos em P.A., podemos escrever:

$$(x - 2r,\ x - r,\ x,\ x + r,\ x + 2r)$$

- Para quatro termos em P.A., a fim de obtermos uma representação simétrica, podemos usar o seguinte artifício:

$$(x - 3y,\ x - y,\ x + y,\ x + 3y),$$

em que $r = x - y - (x - 3y)$, isto é, $r = 2y$.

Exemplo 10

Vamos encontrar três termos em P.A. cuja soma seja 33 e o produto, 440.
A P.A. procurada é $(x - r, x, x + r)$.
Devemos ter:

$$\begin{cases} \text{soma} = 33 \Rightarrow (x - r) + x + (x + r) = 33 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11 \\ \text{produto} = 440 \overset{x = 11}{\Rightarrow} (11 - r) \cdot 11 \cdot (11 + r) = 440 \Rightarrow (11 - r)(11 + r) = 40 \Rightarrow \\ \qquad\qquad \Rightarrow 121 - r^2 = 40 \Rightarrow r = 9 \text{ ou } r = -9 \end{cases}$$

Para $r = 9$, a P.A. é $(2, 11, 20)$.
Para $r = -9$, a P.A. é $(20, 11, 2)$.

Exemplo 11

Vamos construir uma P.A. de quatro termos em que a soma dos dois primeiros é -8 e a dos dois últimos é 16.
Os termos procurados são $(x - 3y, x - y, x + y, x + 3y)$.
Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} (x - 3y) + (x - y) = -8 \\ (x + y) + (x + 3y) = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -8 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Resolvendo por adição, vem:

$$x = 2 \text{ e } y = 3$$

Assim, a P.A. é $(-7, -1, 5, 11)$.

Exercícios

27 Determine três números em P.A. crescente cuja soma seja 39 e o produto dos extremos seja 144.

28 (Unicap-PE) Um triângulo retângulo tem as medidas dos seus lados em progressão aritmética de razão 4 cm. Determine, em centímetros, a soma da medida da hipotenusa com a medida do cateto de menor comprimento.

29 Num quadrilátero, os ângulos internos estão em P.A. e o maior deles mede 150°. Quais são as medidas dos outros ângulos internos?

30 (Fatec-SP) Na compra a prazo de um aparelho eletrodoméstico, o total pago por uma pessoa foi R$ 672,00. A entrada teve valor correspondente a $\frac{1}{6}$ do total, e o restante foi pago em 4 parcelas, cujos valores formaram uma progressão aritmética crescente de razão R$ 40,00.
Qual é o valor da última prestação?

31 Escreva cinco números em P.A. cuja soma seja 30 e o produto do 1º pelo 3º seja 18.

5 ○ Soma dos *n* primeiros termos de uma P.A.

Observe a seqüência dos cem primeiros números naturais positivos: (1, 2, 3, ..., 100). Trata-se de uma P.A. de razão 1.

Suponhamos que se queira calcular a soma dos termos dessa seqüência, isto é, a soma dos cem primeiros números naturais.

Temos:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}, \text{ isto é,}$$
$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 100 \quad (I)$$

Escrevendo (I) em outra ordem, vem:

$$S = 100 + 99 + 98 + \ldots + 1 \quad (II)$$

Fazendo (I) + (II) de acordo com o esquema abaixo indicado, temos:

$$\begin{array}{lrcccccccccccc}
\text{(I)} & S & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\
+ & & & & & & & & & & & & & & & \\
\text{(II)} & S & = & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\
\hline
 & 2 \cdot S & = & \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{\text{cem vezes}} & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Assim, $2 \cdot S = 100 \cdot 101$.

$$S = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5\,050$$

De modo geral, se a seqüência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ é uma P.A. de razão r, podemos escrevê-la na forma:

$$(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r, \ldots, a_n - 2r, a_n - r, a_n)$$

Vamos calcular a soma dos n primeiros termos dessa P.A., que indicaremos por S_n. Repetindo o raciocínio anterior, temos:

$$\begin{array}{lrcccccccccc}
\text{(I)} & S_n = & a_1 & + (a_1 + r) & + (a_1 + 2r) & + \ldots + & (a_n - 2r) & + (a_n - r) & + & a_n \\
\text{(II)} & S_n = & a_n & + (a_n - r) & + (a_n - 2r) & + \ldots + & (a_1 + 2r) & + (a_1 + r) & + & a_1 \\
\hline
\text{(I) + (II):} & 2 \cdot S_n = & \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ vezes}} & & & & & & &
\end{array}$$

$$2 \cdot S_n = (a_1 + a_n) \cdot n \Rightarrow S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

Notemos que o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma P.A. depende do conhecimento do *1º termo da P.A.* (a_1) e do *último termo a ser somado na P.A.* (a_n).

Exemplo 12

Calculemos a soma dos 50 primeiros termos da P.A. (11, 13, 15, ...).

Sabemos que $a_1 = 11$ e $r = 2$.

Precisamos determinar o 50º termo da P.A.:

$$a_{50} = a_1 + 49r \Rightarrow a_{50} = 11 + 49 \cdot 2 \Rightarrow a_{50} = 109$$

Assim, a soma dos 50 primeiros termos da P.A. é:

$$S_{50} = \frac{(a_1 + a_{50}) \cdot 50}{2} \Rightarrow S_{50} = (11 + 109) \cdot 25 = 3\,000$$

Exemplo 13

Em relação à seqüência dos números naturais ímpares, vamos calcular:

a) a soma dos trinta primeiros termos;
b) a soma dos n primeiros termos.

A seqüência é (1, 3, 5, 7, ...), com r = 2.

a) $a_{30} = a_1 + 29r \Rightarrow a_{30} = 1 + 29 \cdot 2 \Rightarrow a_{30} = 59$

Assim:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30}) \cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = \frac{(1 + 59) \cdot 30}{2} \Rightarrow S_{30} = 900$$

b) $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow a_n = -1 + 2n$

Daí:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_n = \frac{(1 - 1 + 2n)n}{2} \Rightarrow S_n = n^2$$

Podemos verificar a resposta encontrada em *b*, atribuindo valores para n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$):

- n = 1: a seqüência é (1) e, assim, $S_1 = 1^2 = 1$.
- n = 2: a seqüência é $\underbrace{(1, 3)}_{S = 4}$, cuja soma é $S_2 = 2^2 = 4$.
- n = 3: a seqüência é $\underbrace{(1, 3, 5)}_{S = 9}$, cuja soma é $S_3 = 3^2 = 9$.

⋮

etc.

Exercícios

32 Calcule a soma dos quinze primeiros termos da P.A. (–14, –10, –6, ...).

33 O termo geral de uma P.A. é $a_n = 48 - 5n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Calcule a soma de seus dez primeiros termos.

34 O primeiro termo de uma P.A. vale 0,7 e a soma de seus vinte primeiros termos é igual a 71. Determine:

a) o vigésimo termo dessa P.A.

b) o décimo termo dessa P.A.

35 Uma gravadora observou que, em um ano, a venda de *compact discs* aumentava mensalmente segundo uma P.A. de razão 400. Se em março foram vendidos 1 600 CDs, quantos CDs a gravadora vendeu naquele ano?

36 (Mackenzie-SP) As somas dos n primeiros termos das seqüências aritméticas (8, 12, ...) e (17, 19, ...) são iguais.
Qual é o valor de n?

37 Dada a P.A. (e^x, $e^x + 1$, $e^x + 2$, ...), determine o valor de x tal que a soma de seus dez primeiros termos seja igual a 50.

38 Suponha que, em um certo mês, o número de queixas diárias registradas em um órgão de defesa do consumidor aumente segundo uma P.A.
Sabendo que nos dez primeiros dias houve 245 reclamações e nos dez dias seguintes houve mais 745 reclamações, determine a seqüência do número de queixas naquele mês.

39 Verificou-se que o número de vendas eletrônicas de um aparelho de som em um portal de Internet aumentava diariamente segundo uma P.A. de razão 8. Sabendo que no primeiro dia foram registradas doze vendas, determine quantos dias esse produto ficou disponível no portal, se, ao todo, foram registradas 2 700 transações.

40 (UMC-SP) Um carro é vendido nas seguintes condições: uma entrada de R$ 5 000,00 e 24 prestações de valores crescentes. A primeira prestação é de R$ 450,00; a segunda, de R$ 460,00; a terceira, de R$ 470,00, ou seja, à prestação anterior são acrescentados R$ 10,00. Qual é o valor da última prestação e o total pago por esse carro?

41 Qual é o valor de:

a) $12 + 25 + 38 + \ldots + 350$?
b) $20^2 - 19^2 + 18^2 - 17^2 + 16^2 - 15^2 + \ldots + 2^2 - 1^2$?

42 Numa P.A., sabe-se que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = n^2 + \frac{3}{2}n$. Determine:

a) S_4 b) a_4 c) a_{20}

43 Quantos termos devemos somar em $(-15, -12, -9, \ldots)$ para obtermos soma igual a 270?

44 (Unirio-RJ) Considere uma progressão aritmética de 4 elementos cujo primeiro elemento é $\log_2 3$. Sabendo-se que a soma desses elementos é $\log_2 5\,184$, determine a razão desta seqüência.

45 (UFF-RJ) Determine o valor de x na equação:

$$\log x + \log x^2 + \log x^3 + \ldots + \log x^{18} = 342$$

6 Progressões Geométricas

Observe a seqüência:

$$(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$$

Notemos que, dividindo um termo qualquer dessa seqüência pelo termo antecedente, o resultado é sempre igual a 2:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{3} = 2; \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{12}{6} = 2; \qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{24}{12} = 2;$$

e assim por diante.

Definição

Progressão Geométrica (P.G.) é a seqüência de números reais não nulos em que o *quociente entre um termo qualquer (a partir do 2º) e o termo antecedente é sempre o mesmo (constante).*

Essa constante é chamada *razão* da P.G. e é indicada por *q*.

Vejamos alguns exemplos:

1. $(2, 6, 18, 54, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = 3$.
2. $(-5, 15, -45, 135, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = -3$.
3. $\left(20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots\right)$ é uma P.G. de razão $q = \frac{1}{2}$.
4. $(4, -4, 4, -4, \ldots)$ é uma P.G. de razão $q = -1$.

Quando $q < 0$, dizemos que a P.G. é *alternada* ou *oscilante*.

Quando $(a_1 > 0$ e $q > 1)$ ou $(a_1 < 0$ e $0 < q < 1)$, a P.G. é *crescente*.

Quando $(a_1 > 0$ e $0 < q < 1)$ ou $(a_1 < 0$ e $q > 1)$, a P.G. é *decrescente*.

7 ○ Termo geral da P.G.

Vamos agora encontrar uma expressão que nos permita obter um termo qualquer da P.G. conhecendo apenas o 1º termo (a_1) e a razão (q).

Isso é possível graças à obediência dos termos de uma P.G. a uma lei especial de formação:

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão q.

Temos:

- $\frac{a_2}{a_1} = q \Rightarrow a_2 = a_1 \cdot q$
- $\frac{a_3}{a_2} = q \Rightarrow a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot q^2$
- $\frac{a_4}{a_3} = q \Rightarrow a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$

⋮ ⋮ ⋮

De modo geral, o termo a_n, que ocupa a n-ésima posição na seqüência, é dado por:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Essa expressão, conhecida como *fórmula do termo geral da P.G.*, permite-nos conhecer qualquer termo da P.G. em função do 1º termo (a_1) e da razão (q).

Assim, temos:

$$a_6 = a_1 \cdot q^5; \quad a_{11} = a_1 \cdot q^{10}; \quad a_{29} = a_1 \cdot q^{28};$$

e assim por diante.

Exemplo 14

Vamos determinar o 10º termo da P.G. (2, 6, 18, ...).

Sabemos que $a_1 = 2$ e $q = 3$.

Assim, pela expressão do termo geral, podemos escrever:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^9 \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9 \Rightarrow a_{10} = 39\,366$$

Exemplo 15

Numa P.G., o 5º termo é igual a 112 e o 1º termo é igual a 7. Vamos determinar a razão da P.G. e, em seguida, obter seu 8º termo.

Como $a_5 = a_1 \cdot q^4$, vem:

$$112 = 7 \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 16 \Rightarrow q = \pm 2$$

(Observe que para $q = 2$ a P.G. é crescente, e para $q = -2$ a P.G. é oscilante.)

Usando novamente a expressão do termo geral, determinemos o 8º termo:

$$a_8 = a_1 \cdot q^7 \Rightarrow a_8 = 7 \cdot (\pm 2)^7 \Rightarrow a_8 = \pm 7 \cdot (128) \Rightarrow a_8 = \pm 896$$

Exemplo 16

Vamos construir a P.G. em que a soma do 3º com o 5º termo é $\frac{5}{2}$ e a soma do 7º com o 9º termo é 40.

Do enunciado, vem:

$$\begin{cases} a_3 + a_5 = \frac{5}{2} \\ a_7 + a_9 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2 + a_1q^4 = \frac{5}{2} \\ a_1q^6 + a_1q^8 = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1q^2(1 + q^2) = \frac{5}{2} \quad (I) \\ a_1q^6(1 + q^2) = 40 \quad (II) \end{cases}$$

Dividindo membro a membro (I) por (II):

$$\frac{a_1q^2(1+q^2)}{a_1q^6(1+q^2)} = \frac{\frac{5}{2}}{40} \Rightarrow \frac{1}{q^4} = \frac{5}{80} \Rightarrow q = \pm 2$$

- Para $q = 2$, substituindo em (I), vem:

$$a_1 \cdot 2^2 \cdot (1 + 2^2) = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{8} \text{ e a P.G. é } \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots\right)$$

- Para $q = -2$, substituindo em (I), vem:

$$a_1(-2^2) \cdot [1 + (-2)^2] = \frac{5}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{8} \text{ e a P.G. é } \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, -1, 2, \ldots\right)$$

Exemplo 17

Vamos determinar x a fim de que a seqüência $\left(\frac{9x-4}{2}, x, x-3\right)$ seja uma P.G.

Em qualquer PG (a_1, a_2, a_3), $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} \Rightarrow a_2^2 = a_1 \cdot a_3$, isto é, o termo central é dado pela média geométrica entre os outros dois termos:

$$x^2 = \left(\frac{9x-4}{2}\right) \cdot (x-3) \Rightarrow 2x^2 = 9x^2 - 31x + 12 \Rightarrow 7x^2 - 31x + 12 = 0$$

As raízes dessa equação são $x_1 = 4$ e $x_2 = \frac{3}{7}$.

Verificando, para $x = 4$, a P.G. é $(16, 4, 1)$ e, para $x = \frac{3}{7}$, a P.G. é $\left(-\frac{1}{14}, \frac{3}{7}, -\frac{18}{7}\right)$.

Exemplo 18

Vamos determinar três números em P.G. cujo produto seja 3 375 e a soma do 1º com o 3º termo seja igual a 78.

Quando queremos encontrar três termos em P.G. e conhecemos algumas informações sobre eles, é interessante escrevê-los na forma $\left(\frac{x}{q}, x, x \cdot q\right)$.

Do enunciado, vem:

$$\begin{cases} \frac{x}{q} \cdot x \cdot xq = 3\,375 \Rightarrow x^3 = 3\,375 \Rightarrow x = 15 \\ \frac{x}{q} + x \cdot q = 78 \underset{x=15}{\Rightarrow} \frac{15}{q} + 15q = 78 \Rightarrow 15q^2 - 78q + 15 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo essa equação do 2º grau, vem $q = 5$ ou $q = \frac{1}{5}$.

- Para $q = 5$, temos $(3, 15, 75)$.
- Para $q = \frac{1}{5}$, temos $(75, 15, 3)$.

Exemplo 19

Vamos interpolar 3 meios geométricos entre $\frac{1}{2}$ e 128.

Devemos formar uma P.G. de 5 termos na qual $a_1 = \frac{1}{2}$ e $a_5 = 128$.

$$\left(\frac{1}{2}, \underbrace{_, _, _}_{\text{3 meios}}, 128\right)$$

Temos:

$$a_5 = a_1 \cdot q^4 \Rightarrow 128 = \frac{1}{2} \cdot q^4 \Rightarrow q^4 = 256 \Rightarrow q = \pm 4$$

- Para $q = 4$, a P.G. é $\left(\frac{1}{2}, 2, 8, 32, 128\right)$.
- Para $q = -4$, a P.G. é $\left(\frac{1}{2}, -2, 8, -32, 128\right)$.

Exercícios

46 Calcule a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) $(3, 6, 12, 24, 48, \ldots)$

b) $(-2, 8, -32, 128, \ldots)$

c) $(3^{20}, 3^{22}, 3^{24}, \ldots)$

d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{48}, \frac{1}{192}, \ldots\right)$

e) $(\sqrt{5}, 5, 5\sqrt{5}, 25, \ldots)$

47 Qual é o 8º termo da P.G. $(800, 400, 200, \ldots)$?

48 Qual é o 6º termo da P.G. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, -\frac{8}{27}, \ldots\right)$?

49 O 2º termo de uma P.G. de termos positivos é 10^5 e o 10º termo é 10^{21}.
Qual é a razão dessa P.G.?

50 Num programa de fisioterapia, um paciente recebeu a instrução de nadar, a cada dia, 50% a mais da distância percorrida no dia anterior. Se no primeiro dia o paciente conseguiu nadar 20 metros, qual será o número *inteiro* mais próximo da distância que ele deverá nadar no sexto dia?

51 O número de participantes de um bate-papo virtual (*chat*) em um portal de Internet varia segundo uma P.G. no período das 23 horas às 6 horas. Se às 2 horas da manhã havia 2000 pessoas nas salas de bate-papo e às 5 da manhã, 250 pessoas, determine o número de internautas nas salas:

a) às 23 horas.

b) às 6 horas.

52 (UF-PA) Um motorista aciona os freios de um automóvel. Após a freada, o veículo percorre 27 metros no primeiro segundo e, durante alguns segundos, percorre, em cada segundo, $\frac{1}{3}$ da distância que percorreu no segundo anterior. Ache a distância total a ser percorrida no tempo de 4 segundos após a freada.

53 Numa P.G. oscilante, a soma do 2º com o 5º termo é –210, e a soma do 4º com o 7º termo é –840. Qual é o 1º termo dessa P.G.?

54 Dada a P.G. $(2^x, 2^{2x}, 2^{3x}, \ldots)$, determine o valor de x de modo que seu décimo termo seja $\frac{1}{128}$.

55 (U. F. Santa Maria-RS) Um navio encalhado provoca, em torno de si, um vazamento circular de óleo. Constatou-se, ao fim do 1º dia de vazamento, que o raio da mancha de óleo media r metros. Verificou-se, ainda, que o raio da mancha de óleo dobrava a cada 24 horas.
Nessas condições, qual é a razão da área da mancha de óleo ao fim do 7º dia pela área da mancha no fim do 1º dia?

56 (UF-SC, adaptado) Sabendo que a seqüência $(4y, 2y - 1, y + 1)$ é uma P.G., determine:

a) o valor de y.

b) a razão da P.G.

57 Determine x de modo que a seqüência $(3^{x+1}, 3^{4-x}, 3^{3x+1})$ seja uma P.G.

58 Qual é o número de termos da P.G. $(\sqrt{3}, \sqrt{6}, \ldots, 16\sqrt{3})$?

59 As idades de três irmãos são números inteiros que estão em P.G. Se o produto dessas idades é 64 e a soma das idades dos dois mais velhos é 20, quantos anos tem cada um dos irmãos?

60 Os números que expressam as medidas do lado, da diagonal e da área de um quadrado podem estar, nessa ordem, em P.G.? Em caso afirmativo, qual é a razão dessa P.G.?

61 (U. F. Ouro Preto-MG, adaptado) Os números que expressam as medidas dos lados de um triângulo *retângulo* podem estar, nessa ordem, em P.G.? Em caso afirmativo, qual é a razão dessa P.G.?

62 Subtraindo-se um mesmo número de 6, 14 e 38, obtemos, nessa ordem, uma P.G. Qual é a razão dessa P.G.?

63 (Unicamp-SP) Considere uma progressão geométrica de termos não nulos, na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

a) Calcule os dois valores possíveis para a razão q dessa progressão.

b) Supondo que o primeiro termo seja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q > 0$, calcule a soma dos três primeiros termos dessa progressão.

64 (UF-MG) Três números reais a, b e c satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = 9 \\ a + b + c = 117 \end{cases}$$

Além disso, eles estão em progressão geométrica, isto é, existe um número real r tal que $b = ar$ e $c = br$. Determine todos os possíveis valores de r e os correspondentes valores de a, b e c.

8 ○ Trabalhando ao mesmo tempo com P.A. e P.G.

Há vários problemas que envolvem, simultaneamente, seqüências aritméticas e geométricas. Para resolvê-los, em geral, usamos a propriedade fundamental que caracteriza cada uma dessas seqüências.

Exemplo 20

Vamos encontrar x e y de modo que a seqüência $(5, y, x)$ seja uma P.A. de termos positivos e a seqüência $(x + 1, y - 2, 4)$ seja uma P.G.

- Se $(5, y, x)$ é P.A., então $y = \frac{x+5}{2}$. (I)
- Se $(x + 1, y - 2, 4)$ é P.G., então $(y - 2)^2 = 4(x + 1)$. (II)
- Substituindo (I) em (II), encontramos:

$$\left(\frac{x+5}{2} - 2\right)^2 = 4(x+1) \Rightarrow x^2 - 14x - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

- Se $x = 15$, em (I), encontramos $y = 10$. Assim a P.A. é $(5, 10, 15)$ e a P.G. é $(16, 8, 4)$.
- Se $x = -1$, em (I), encontramos $y = 2$. Assim a P.A. é $(5, 2, -1)$, que não possui todos os termos positivos e deve ser descartada.

Exercícios

65 Dada a P.G. $(3, 9, 27, \ldots)$:

a) escreva seu termo geral;

b) determine o produto de seus vinte primeiros termos.

66 A seqüência $(x + 1, x^2, 14)$ é uma P.A. crescente e $(x, 6, y)$ é uma P.G.

a) Qual é a razão da P.G.?

b) Qual é o valor de y?

67 (UF-MG) Os números reais 3, a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é positiva. Por sua vez, os números reais a, b e 8 são, também nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica.
Determine a e b.

68 Demonstre que, se (a, b, c) é uma P.G. de termos positivos, então a seqüência de seus logaritmos decimais, nessa mesma ordem, é uma P.A.

69 (UF-AL) Numa progressão aritmética crescente, cujo primeiro termo é 2, os termos a_1, a_4 e a_{10} estão em progressão geométrica. Determine a razão dessa progressão aritmética.

70 (Unifor-CE) Chama-se *progressão harmônica* uma seqüência de números tais que seus inversos constituem uma progressão aritmética. Assim sendo, se os três primeiros termos de uma *progressão harmônica* são 8, 5 e $\frac{40}{11}$, qual é o seu sexto termo?

9 Soma dos n primeiros termos de uma P.G.

Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão $q \neq 1$.
Queremos encontrar uma expressão para:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \quad (I)$$

Multiplicando por q os dois membros da igualdade acima, e lembrando a formação dos elementos de uma P.G., vem:

$$q \cdot S_n = q(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n) = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + \ldots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n \cdot q \quad (II)$$

Fazendo (II) – (I), temos:

$$q \cdot S_n - S_n = (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q) - (a_1 + \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \ldots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n})$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_n \cdot q - a_1$$

Como $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, então:

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^{n-1} \cdot q - a_1, \text{ isto é,}$$

$$S_n \cdot (q - 1) = a_1 q^n - a_1 \overset{q \neq 1}{\Rightarrow} S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Observações

1ª) O cálculo da soma dos n primeiros termos de uma P.G., como vemos, depende do conhecimento da razão da P.G. e de seu 1º termo.

2ª) Note que a expressão encontrada é válida apenas para $q \neq 1$. Se $q = 1$, a P.G. tem todos os termos iguais entre si (ela é constante). Desse modo, se quisermos determinar o valor da soma de seus n primeiros termos, assim procederemos:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \overset{q=1}{\Rightarrow} S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \ldots + a_1}_{n \text{ vezes}} \Rightarrow S_n = n \cdot a_1$$

Exemplo 21

Vamos calcular a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (1, 2, 4, 8, ...).
Temos $a_1 = 1$ e $q = 2$, então:

$$S_{10} = \frac{a_1(q^{10} - 1)}{q - 1} = \frac{1 \cdot (2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$$

Exemplo 22

Qual é o número mínimo de termos que devem ser considerados na P.G. (3, 9, 27, 81, ...) para se obter uma soma maior que 1000?
Nessa P.G. temos $a_1 = 3$ e $q = 3$, então:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{n+1} - 3}{2}$$

Impondo $S_n > 1000$, temos:

$$\frac{3^{n+1} - 3}{2} > 1000 \Rightarrow 3^{n+1} - 3 > 2000 \Rightarrow 3^{n+1} > 2003 \text{ (I)}$$

Notando que $3^6 = 729$ e $3^7 = 2187$, concluímos que o menor valor de $n + 1$ para satisfazer a condição (I) é $n + 1 = 7$ e, portanto, $n = 6$. Outro caminho é usar a calculadora: $n + 1 > \frac{\log 2003}{\log 3}$.

Exercícios

71 Calcule a soma dos oito primeiros termos da P.G. (–2, 6, –18, ...).

72 Calcule a soma dos dez primeiros termos da P.G. (m, m^2, m^3, m^4, ...):

a) para $m = 1$. b) para $m = 2$. c) para $m = -2$.

73 Quantos termos da P.G. (2, –6, 18, –54) devemos considerar a fim de que a soma resulte 9842?

74 (Umesp-SP) Duas pessoas ficam sabendo de uma informação. No dia seguinte, cada uma delas passa essa informação para outras três pessoas. Cada uma dessas pessoas, no dia seguinte, conta para outras três e assim sucessivamente. Passados cinco dias, quantas tomarão conhecimento daquela informação inicial?

75 (UF-BA) Um jogador faz uma série de apostas e, na primeira vez, perde R$ 1,00; na segunda, duplica a aposta e perde R$ 2,00; na terceira, duplica a aposta anterior e perde R$ 4,00; e assim, sucessivamente, até ter perdido um total de R$ 255,00.
Calcule quantas vezes o jogador apostou.

76 (UF-CE) Seja $x = 1 + 10 + 10^2 + \ldots + 10^{n-1}$ e $y = 10^n + 5$. Determine $\sqrt{xy + 1}$.

77 (U. F. Ouro Preto-MG) A soma dos n primeiros termos de uma P.G. é dada por $S_n = 3^n - 1$, sendo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Pede-se:

a) Encontre o primeiro e o segundo termos da P.G.
b) Obtenha a razão da P.G.
c) Expresse o termo geral a_n da P.G.
d) Utilize a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma P.G. para verificar que, de fato, $S_n = 3^n - 1$.

10 ○ Série geométrica convergente

Vejamos o seguinte problema:

O que acontece com a soma dos termos de uma P.G. quando levamos em conta um número cada vez maior de termos a serem somados?

Vamos considerar dois casos:

1º) Seja a P.G. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$ de razão $q = \frac{1}{2}$. Calculemos a soma de seus n primeiros termos para alguns valores de n:

$$S_5 = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} = 1{,}9375$$

$$S_{10} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}998$$

$$S_{20} = \frac{1 \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{20} - 1\right]}{\frac{1}{2} - 1} \cong 1{,}999998$$

Podemos notar que, à medida que n aumenta, o valor de S_n fica cada vez mais próximo de 2.

Dizemos que, para valores de n tão grandes quanto se queira, a soma $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ *converge* para 2, ou, ainda, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots = 2$.

2º) Seja a P.G. (2, 4, 8, 16, ...) de razão $q = 2$.

Calculando alguns valores de S_n, temos:

$$S_5 = 62;\ S_{10} = 2046;\ S_{20} = 2097150$$

Podemos notar que, à medida que n aumenta, S_n também aumenta, isto é, o valor de S_n fica tão grande quanto se queira. Dizemos que a soma $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots$ *diverge*.

Nosso objetivo é estudar apenas as *séries geométricas convergentes*.

Seja a P.G. $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ cuja razão q é tal que:

$$-1 < q < 1$$

Assim, *q^n é um número cada vez mais próximo de zero à medida que o expoente* n *aumenta*.

Então, quando calculamos S_n para *n suficientemente grande*, temos:

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$ (esse é o valor para o qual a soma converge).

Assim:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \frac{a_1}{1 - q};\ -1 < q < 1$$

Exemplo 23

Vamos calcular o valor de $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$

Queremos somar os "infinitos" termos da P.G. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots\right)$.

Trata-se de uma série geométrica *convergente*, pois $q = \frac{1}{3}$ $(-1 < q < 1)$.

Assim, a soma converge para:

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{1}{\frac{2}{3}}$$

Exemplo 24

Vamos resolver a equação $x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{64} + \ldots = \frac{4}{3}$.

O 1º membro da equação representa a soma dos termos da P.G. infinita $\left(x, \frac{-x^2}{4}, \frac{x^3}{16}, \ldots\right)$, cujo valor é $\frac{a_1}{1 - q} = \frac{x}{1 - \left(-\frac{x}{4}\right)} = \frac{x}{1 + \frac{x}{4}}$.

Daí:

$$\frac{x}{1 + \frac{x}{4}} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = 2$$

Notemos que, para $x = 2$, temos $q = -\frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$ $(-1 < q < 1)$.

Exemplo 25

Vamos obter a fração geratriz da dízima 0,272727...

Seja $x = 0{,}272727\ldots$ Podemos escrever x na forma:

$$x = 0{,}27 + 0{,}0027 + 0{,}000027 + \ldots$$

Observemos que x representa a soma dos termos de uma P.G. infinita, cujo 1º termo é $a_1 = 0{,}27$ e a razão é $q = \frac{0{,}0027}{0{,}27} = \frac{1}{100} = 0{,}01$.

Assim, a série converge para:

$$x = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{0{,}27}{1 - 0{,}01} \Rightarrow x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

Exercícios

78 Calcule o valor de cada uma das seguintes somas:

a) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$

b) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \ldots$

c) $\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \ldots$

79 Qual é o valor de $S = 2 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{2} - \frac{1}{27} + \frac{1}{4} - \frac{1}{81} + \ldots$?

80 Resolva, em $\mathbb{R}$, as seguintes equações:

a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{4} + \frac{x^4}{8} + \ldots = 6$

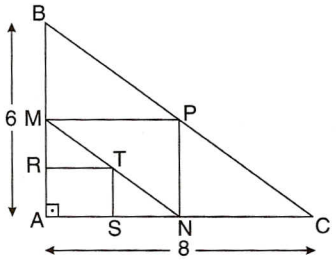
b) $2^x + 2^{x-1} + 2^{x-2} + \ldots = 1$

81 Encontre a fração geratriz de cada uma das seguintes dízimas periódicas:

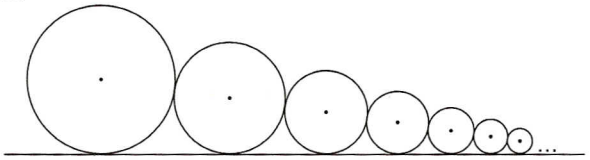
a) 0,444... b) 1,7777... c) 0,434343... d) 1,0222...

82 (UF-RN) Qual é a soma dos termos da progressão geométrica infinita $2, \sqrt{2}, 1, \ldots$?

83 Seja ABC o triângulo retângulo da figura. Por M e N, pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, construímos o retângulo AMPN. Unindo M e N, construímos o triângulo retângulo AMN; por R e S, pontos médios de $\overline{AM}$ e $\overline{AN}$, respectivamente, construímos o retângulo ARTS e assim indefinidamente. Determine a diferença entre a soma das áreas de todos os triângulos assim construídos e a soma das áreas de todos os retângulos assim construídos.



84 O logotipo de uma empresa é uma seqüência infinita de círculos tangentes externamente entre si, como mostra a figura abaixo:



Se o raio de um círculo qualquer é $\frac{3}{4}$ do raio do círculo anterior, e o raio do maior círculo é r, calcule, em função de r:

a) a soma dos perímetros de todos os círculos construídos.
b) a soma das áreas de todos os círculos construídos.

Testes de vestibulares

1 (Uneb-BA) A seqüência $(3^{x+1}, 3^{x+2}, 3^{x+3}, \ldots)$:

a) é uma progressão aritmética de razão 1.
b) é uma progressão aritmética de razão 3.
c) é uma progressão geométrica de razão x.
d) é uma progressão geométrica de razão 3.
e) não é progressão aritmética nem geométrica.

2 (UF-SE) Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ a seqüência dos números naturais pares e $(b_1, b_2, b_3, \ldots)$ a seqüência dos números naturais ímpares. A seqüência $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ com $c_n = a_n + b_n$, com n natural não nulo, é uma progressão:

a) geométrica de razão 2.
b) aritmética de razão 2.
c) geométrica de razão 4.
d) aritmética de razão 4.
e) aritmética de razão 5.

3 (Vunesp-SP) Numa cerimônia de formatura de uma faculdade, os formandos foram dispostos em 20 filas de modo a formar um triângulo, com 1 formando na primeira fila, 3 formandos na segunda, 5 na terceira e assim por diante, constituindo uma progressão aritmética. O número de formandos na cerimônia é:

a) 400 c) 420 e) 840
b) 410 d) 800

4 (UF-PB) Seja (x, y, z) uma progressão geométrica de razão r, com $x \neq y$ e $x \neq 0$. Se (x, 2y, 3z) é uma progressão aritmética, então r é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ e) 4
b) $\frac{1}{3}$ d) 2

5 (Mackenzie-SP) Se numa progressão geométrica de termos positivos o terceiro termo é igual à metade da razão, o produto dos três primeiros termos é igual a:

a) 8 c) 4 e) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$

6 (Famec-PR) Segundo cálculos do Serviço Social Autônomo Paranacidade, baseados em dados do IBGE, a população do município de Curitiba, no início de 1999, era de cerca de 1 milhão e meio de habitantes. Sabe-se também que a taxa anual de crescimento dessa população é de 2,3%. Se essa taxa se mantiver constante, pode-se concluir que, no início do ano 2010, a população do município de Curitiba, em milhões de habitantes, será de:

a) $1{,}5 \cdot 12 \cdot (0{,}23)$ d) $1{,}5 \cdot (1{,}23)^{12}$
b) $1{,}5 \cdot (1{,}023)^{11}$ e) $1{,}5 \cdot (2{,}3)^{11}$
c) $1{,}5 \cdot (1{,}23)^{11}$

7 (Unifor-CE) Subtraindo-se um mesmo número de cada termo da seqüência (13, 7, 5) obtém-se uma progressão geométrica. A razão dessa progressão é:

a) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{1}{3}$

8 (Ucsal-BA) Uma pessoa tomou emprestada a quantia de R$ 1 200,00 e vai devolvê-la com juros que totalizam R$ 750,00. O pagamento será feito em 10 prestações, sendo cada uma delas maior que a anterior em R$ 10,00. O valor da primeira prestação deverá ser:

a) R$ 130,00 d) R$ 160,00
b) R$ 140,00 e) R$ 170,00
c) R$ 150,00

9 (Unirio-RJ) Considere uma progressão geométrica de 5 termos e razão positiva, em que a soma do primeiro com o terceiro termo é $\frac{9}{2}$ e o produto de seus termos é 1024. O produto dos três termos iniciais dessa progressão é igual a:

a) $\frac{1}{2}$ c) $2\sqrt{2}$ e) $8\sqrt{2}$
b) 1 d) $4\sqrt{2}$

10 (U. F. Viçosa-MG) Se x, y e z são números inteiros e estão, nesta ordem, em progressão aritmética, então o produto $2^x\ 2^y\ 2^z$ vale:

a) 4^y c) 8^y e) 8^x
b) 6^y d) 6^z

11 (Unirio-RJ) Um agricultor estava perdendo a sua plantação, em virtude da ação de uma praga. Ao consultar um especialista, foi orientado para que pulverizasse, uma vez ao dia, uma determinada quantidade de um certo produto, todos os dias, da seguinte maneira:

primeiro dia: 1,0 litro;
segundo dia: 1,2 litro;
terceiro dia: 1,4 litro;
... e assim sucessivamente.

Sabendo-se que o total de produto pulverizado foi de 63 litros, o número de dias de duração desse tratamento nessa plantação foi de:

a) 21 c) 25 e) 30
b) 22 d) 27

12 (U. F. Uberlândia-MG) Sejam a_1, a_2, a_3 números reais cuja soma é igual a 38. Sabendo-se que $a_1 - 2$, a_2, a_3 estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão 6, determine o maior desses números.

a) 6 c) 18 e) 32
b) 12 d) 24

13 (Unifor-CE) O número real x que satisfaz a sentença $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{8}{x^4} + \ldots = 1$ é:

a) 1 c) 3 e) 5
b) 2 d) 4

14 (Fuvest-SP) A soma das frações irredutíveis, positivas, menores do que 10, de denominador 4, é:

a) 10 c) 60 e) 100
b) 20 d) 80

15 (Fatec-SP) Se o lado, a altura e a área de um triângulo eqüilátero formam, nessa ordem, uma progressão geométrica, então a medida do lado desse triângulo é um número:

a) irracional.
b) racional.
c) inteiro.
d) real e maior que $\sqrt{3}$.
e) real e compreendido entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

16 (FEI-SP) Um trabalho escolar de 150 páginas deverá ser impresso em uma impressora que apresenta os seguintes problemas: nas páginas 6, 12, 18, ... (múltiplos de 6) o cartucho de tinta amarela falha e nas páginas 8, 16, 24, ... (múltiplos de 8) falha o cartucho de tinta azul. Supondo-se que em todas as páginas do trabalho sejam necessárias as cores amarela e azul, quantas páginas serão impressas sem falhas?

a) 105 c) 113 e) 120
b) 107 d) 116

17 (UF-RS) Considere esta progressão geométrica: 3; 0,3; 0,03; 0,003; ...
Os logaritmos decimais de cada um desses números, na ordem em que estão dispostos, formam uma:

a) progressão geométrica de razão 0,01.
b) progressão geométrica de razão 0,1.
c) progressão aritmética de razão 0,1.
d) progressão aritmética de razão –1.
e) progressão geométrica de razão –1.

18 (Unaerp-SP) Seja S a soma dos termos de uma progressão aritmética com um número par de termos, todos inteiros. Se o primeiro termo é –2, e o último é 23, pode-se afirmar que S é um número inteiro divisível por:

a) 2 c) 5 e) 9
b) 4 d) 7

19 (UPE-PE) A soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente com uma infinidade de termos é 6. Se a soma dos dois primeiros termos é $\frac{9}{2}$, podemos afirmar que a razão é:

a) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$
b) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{2}{5}$

20 (UFF-RJ) São dadas duas progressões: uma aritmética (P.A.) e outra geométrica (P.G.).
Sabe-se que:

- a razão da P.G. é 2;
- em ambas o primeiro termo é igual a 1;
- a soma dos termos da P.A. é igual à soma dos termos da P.G.;
- ambas têm 4 termos.

Pode-se afirmar que a razão da P.A. é:

a) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{7}{6}$ e) $\frac{11}{6}$
b) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{9}{6}$

21 (Unirio-RJ) O professor G. Ninho, depois de formar uma progressão aritmética de 8 termos, começando pelo número 3 e composta apenas de números naturais, notou que o 2º, o 4º e o 8º termos formavam, nessa ordem, uma progressão geométrica. G. Ninho observou ainda que a soma dos termos dessa progressão geométrica era igual a:

a) 42 c) 32 e) 24
b) 36 d) 28

22 (UFR-RJ) Observe a seqüência abaixo.

$$S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{9} + \frac{1}{4} - \frac{1}{27} + \frac{1}{8} + \frac{1}{81} + \frac{1}{16} - \frac{1}{243} \ldots$$

O valor da soma S é:

a) $\frac{7}{4}$ c) $\frac{7}{3}$ e) $\frac{14}{3}$
b) $\frac{14}{9}$ d) $\frac{7}{2}$

23 (Fuvest-SP) Uma P.A. e uma P.G. têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da P.A. excede o segundo termo da P.G. em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

a) 10 d) 16
b) 12 e) 18
c) 14

24 (Mackenzie-SP)

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots = 11x - 5$$

Supondo $0 < x < 1$, o produto dos valores de x que verificam a igualdade acima é:

a) $\frac{5}{16}$ c) $\frac{5}{2}$ e) $\frac{5}{12}$
b) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{5}{4}$

25 (Fuvest-SP) A seqüência a_n é uma P.A. estritamente crescente, de termos positivos. Então, a seqüência $b_n = 3^{a_n}$, $n \geq 1$, é uma:

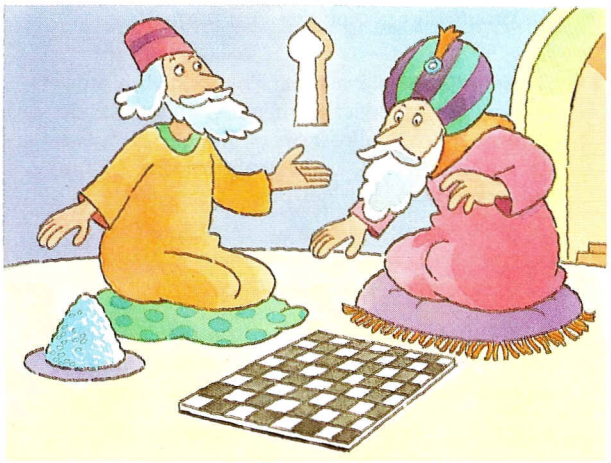
a) P.G. crescente.
b) P.A. crescente.
c) P.G. decrescente.
d) P.A. decrescente.
e) seqüência que não é uma P.A. e não é uma P.G.

26 (PUC-SP) A soma dos n primeiros termos da seqüência $(6, 36, 216, \ldots, 6^n, \ldots)$ é 55 986. Nessas condições, considerando log 2 = 0,30 e log 3 = 0,48, o valor de log n é:

a) 0,78 d) 1,56
b) 1,08 e) 1,68
c) 1,26

Desafios

1 (UnB-DF) Conta uma lenda que o rei de certo país ficou tão impressionado ao conhecer o jogo de xadrez que quis recompensar seu inventor, dando-lhe qualquer coisa que ele pedisse. O inventor, então, disse ao rei: "Dê-me simplesmente 1 grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, 2 grãos pela segunda casa, 4 grãos pela terceira, 8 grãos pela quarta e assim sucessivamente, até a 64ª casa do tabuleiro". O rei considerou o pedido bastante simples e ordenou que fosse cumprido. Supondo que um grão de trigo tem massa igual a 0,05 g e que a produção mundial de trigo em 1997 foi de 560 milhões de toneladas, julgue se os itens abaixo são verdadeiros ou falsos:



a) O número de grãos de trigo devido ao inventor apenas pela 11ª casa do tabuleiro é menor que 1 000.

b) Até a 30ª casa, seriam devidas ao inventor mais de 50 toneladas de grãos.

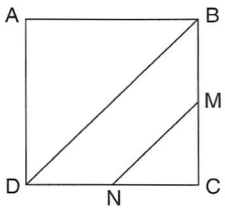
c) A quantidade de trigo devida apenas pela 31ª casa corresponde à quantidade recebida até a 30ª casa acrescida de um grão.

d) Seriam necessárias mais de 1 000 vezes a produção mundial de trigo de 1997 para recompensar o inventor.

2 (UF-RJ, adaptado) Mister MM, o Mágico da Matemática, apresentou-se diante de uma platéia com 50 fichas, cada uma contendo um número. Ele pediu a uma espectadora que ordenasse as fichas de forma que o número de cada uma, excetuando-se a primeira e a última, fosse a média aritmética do número da anterior com o da posterior. Mister MM solicitou a seguir à espectadora que lhe informasse o valor da soma da décima sexta com a trigésima quinta ficha, obtendo como resposta, 149. Para delírio da platéia, Mister MM adivinhou o valor da soma de todos os números que constavam nas fichas. Determine você também esse valor.

3 (Vunesp-SP) A área do quadrado ABCD da figura é 1. Nos lados $\overline{BC}$ e $\overline{DC}$ tomam-se, respectivamente, os pontos M e N de modo que $\overline{MN}$ seja paralelo à diagonal $\overline{DB}$.

Se as áreas do triângulo CMN, do trapézio MNDB e do triângulo ABD formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, calcule a medida de $\overline{MC}$.



4 (Fuvest-SP) 500 moedas são distribuídas entre três pessoas A, B e C, sentadas em círculo, da seguinte maneira: A recebe uma moeda, B duas, C três, A quatro, B cinco, C seis, A sete, e assim por diante, até não haver mais moedas suficientes para continuar o processo. A pessoa seguinte, então, receberá as moedas restantes.

a) Quantas foram as moedas restantes e quem as recebeu? (Deixe explícito como você obteve a resposta.)

b) Quantas moedas recebeu cada uma das três pessoas?

Respostas dos exercícios e testes

1 CONJUNTOS NUMÉRICOS

EXERCÍCIOS

1 $A \cap B = \{2, 3, 4, 5\}$; $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2 $D \cap E = \{x \in \mathbb{N} \mid 8 \leq x \leq 10\}$

3 b, c, d, f, i

4 a) -2 b) -13 c) 0

5 a) $a + b = 0$ b) $c \neq \pm d$

6 a) V b) F c) V d) V e) V f) F

7 $\frac{9}{10}$ ou 0,9

8 a) $0,\overline{3}$ b) 0,4 c) 0,04 d) $0,0\overline{3}$ e) 5,6 f) $0,6\overline{3}$

9 a) $\frac{4}{9}$ b) $\frac{16}{9}$ c) $\frac{20}{11}$ d) $\frac{163}{9}$ e) $\frac{116}{495}$ f) $\frac{4097}{3300}$

10 19

11 $\frac{74}{15}$ ou $4,9\overline{3}$

12 $0,\overline{6}$

14 13; $0,541\overline{6}$

15 a) $\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{17}{18} < \frac{18}{19} < 1 < 1,\overline{1} < \frac{\sqrt{5}}{2} < \sqrt{2}$

b) $\frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{4\sqrt{3}}{7} < \frac{98}{99} < \frac{\pi}{\sqrt{10}} < 0,\overline{9} = 1 < \frac{99}{98} < \frac{\sqrt{10}}{3}$

16 $0,\overline{9}$ e 1; $\frac{98}{99}$ e $\frac{99}{98}$

17 a) 9 b) $\frac{4}{55} = 0,0\overline{72}$

18 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{11}$

19 $2,\overline{72} = \frac{30}{11}$

20 $1,\overline{36}$; -3

21 Transformar um número irracional em racional.

22 a) sim; A = -14 b) racional; B = $-0,4$

23 Todas as afirmações são verdadeiras.

25 O menor valor de p é 1571 e o maior, 1581.

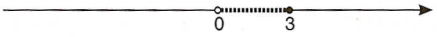
26 Impossível.

28 12345679

29 47

30 a)

b)

c)


d)

e)

f)

31 a) $G = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leq x < -\frac{5}{3}\right\}$

b) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

c) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

d) $J = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\sqrt{3} \text{ ou } x > 0\}$

e) $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$

32 $L \cup M = \mathbb{R}$; $L \cap M =]-3, -1[\cup [2, 3[$

33 $S \cap T = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$

TESTES DE VESTIBULARES

1 c **4** c **7** b **10** a **13** a

2 c **5** d **8** b **11** e **14** e

3 b **6** e **9** c **12** e

2 FUNÇÕES

EXERCÍCIOS

1 a) sim; $t = 15n$ b) 5 horas c) não; faltarão 3 páginas

2 a) R$ 14,00 b) $y = 14 + 2x$ c) 28

3 a)

Lado (m)	Área (m^2)
2	84
3,5	92,25
5	105
6	116

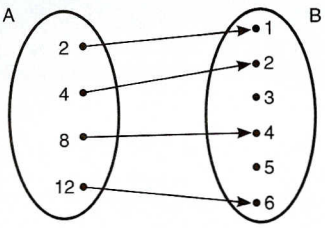
b) $A(x) = 80 + x^2$ c) 144 m^2

4 a) 23 ℓ/min b) 3h20 min c) $v(t) = 4600 - 23t$, com $t \leq 200$

5 a) 200 e 800 b) $n(t) = 50 \cdot 2^t$ c) 8×10^8 bactérias

6 Os esquemas *a* e *c* representam funções, pois a cada elemento de *A* corresponde um único elemento em *B*. O esquema *b* não representa função, pois o elemento 2 de *A* foi associado a dois valores em *B*, 1 e 2. O esquema *d* não representa função, pois o elemento 1 de *A* não está associado a nenhum elemento de *B*.

7 sim



8 a) sim
b) sim
c) Não, pois x = 2 deveria estar associado a y = 5, mas 5 ∉ B.

9 a) 10 e 34
b) Não, pois –1 não pertence ao domínio ℕ.

10 a) 3 b) $\frac{9}{4}$ c) 6 d) $8 - 2\sqrt{5}$

11 a) –2 b) 8 c) –1

12 $\frac{26}{9}$

13 a) 64 b) 51

14 a) –6 b) 1 c) $x = \frac{6}{5}$

15 a) 90 b) 50

16 a) 25000 b) 9000; 15000 c) daqui a 8 anos

17 a) 300; 525; 1200 b) janeiro e maio

18 a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$f(x) = 2x$
b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g(x) = x^2$
c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$h(x) = 3x - 1$

19 a) 0 b) 3

20 a) ℝ
b) ℝ
c) $\mathbb{R} - \{1\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -5\}$

21 a) $\left\{x \in \mathbb{R} | x \geq 0 \text{ e } x \neq \frac{2}{3}\right\}$
b) $\mathbb{R}^*$
c) $\left\{x \in \mathbb{R} | x > \frac{1}{2}\right\}$

22 ℝ

23 a) população (dependente) e tempo (independente)
b) 76405406 habitantes
c) sim
d) Não, tornou-se 2,89 vezes maior.

24 a) V; a cada ano corresponde um único número de declarações
b) V; a função é crescente
c) V; o acréscimo foi de 1,66 milhão, aproximadamente
d) F; chegará aos 21,027 milhões

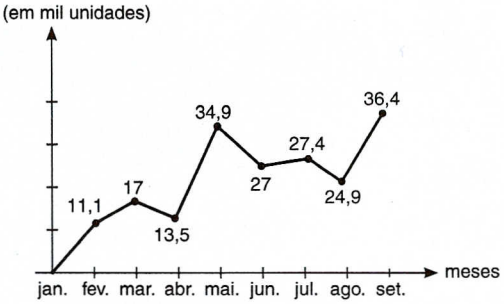
25 a) De 1991 a 1992, de 1993 a 1996, de 1998 a 1999.
b) melhor: 1996; 86%
pior: 2001; 42%
c) 1992, 1994, 1995, 1996, 1997, 1999 e 2000
d) Empatou três e perdeu dois jogos.

26 a) V b) V
c) F; a diferença aumentou no decorrer do tempo
d) F; em 31/7 a situação estava pior

27 a) março, abril, maio, junho
b) mínimo: agosto; máximo: março
c) de maio a junho; 5800 motos
d) 1º trimestre: aproximadamente 172000 motos
2º trimestre: aproximadamente 184000 motos

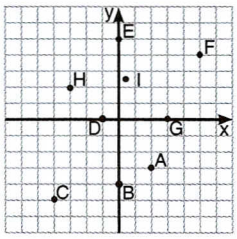
28 a) US$ 29,20 b) US$ 30,65
c) 10h15min e 10h30min; 10h45min e 11h45min; 11h45min e 12h; 12h15min e 12h30min
d) Sim. 10% → 2,745 e 5% → 1,3725. Assim, um acréscimo de 5% levaria a cotação para US$ 28,82.

29 a) janeiro a março; abril a maio; julho a agosto
b) setembro; 36400
c)



30 A(4, 2), B(–4, 6), C(–5, –3), D(4, –5), E(0, 4), F(–3, 0), G(0, –6), H(5, 0), I(0, 0)

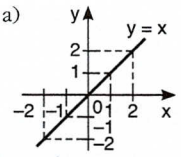
31



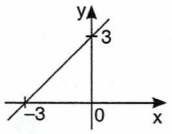
32 $x = -\frac{1}{5}$ e $y = \frac{13}{5}$

33 2

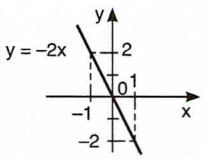
34 a)



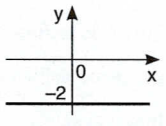
b)



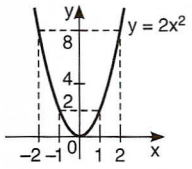
c)



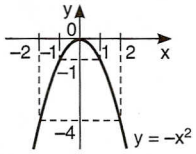
d)



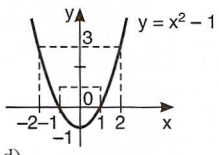
35 a)



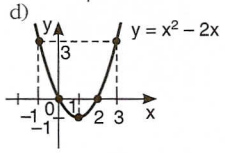
b)



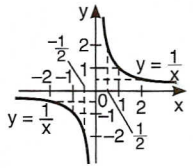
c)



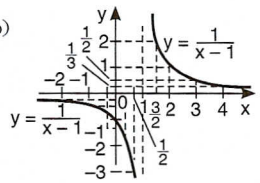
d)



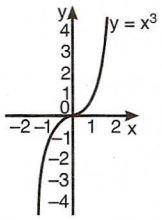
36 a)



b)

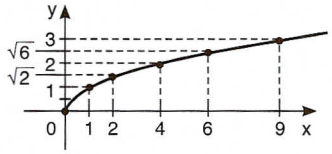


c)

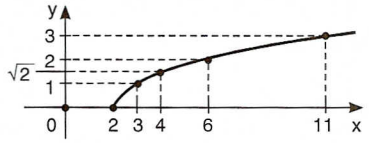


37 a) Trace uma reta vertical por x = 1, por exemplo. Note que ela encontra o gráfico duas vezes.
b) O número x = 3 está associado a infinitos valores de *y*.

38 a)



b)



39 a) {–2, 0, 2}
b) $\{y \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2\}$
c) $\{y \in \mathbb{R} \mid y = 1 \text{ ou } y \geq 2\}$
d) $\mathbb{R}$
e) $\{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2 \text{ ou } y > 4\}$
f) $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1\}$

40 a) decrescente para $x \leq 2$ e crescente para $x \geq 2$
b) crescente para $x \leq 0$, constante para $0 \leq x \leq \frac{9}{2}$ e decrescente para $x \geq \frac{9}{2}$
c) crescente para todo $x \in \mathbb{R}$
d) crescente para $x \geq 0$ e decrescente para $x \leq 0$

41 a) F; $f\left(\frac{3}{2}\right) = 2$
b) F; $f(4) < 0$ e $f(-1) > 0$
c) V
d) V
e) F; $f(-2) > 0$ e $f(2) > 0$, logo $f(-2) + f(2) > 0$

42 a) $f(x) > 0$ quando $x < 4$
$f(x) < 0$ quando $x > 4$
raiz: 4
b) $f(x) > 0$ quando $0 < x < 2$
$f(x) < 0$ quando $x < 0$ ou $x > 2$
raízes: 0 e 2
c) $f(x) > 0$ quando $x < -5$ ou $-3 < x < 2$ ou $x > 6$
$f(x) < 0$ quando $-5 < x < -3$ ou $2 < x < 6$
raízes: –5, –3, 2, 6
d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$. Não há raízes reais.

43 a) I b) P c) 0 d) P e) I

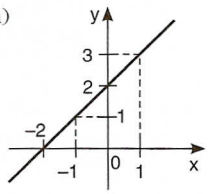
TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**5**	e	**9**	d	**13**	c	**17**	d
2	d	**6**	e	**10**	e	**14**	d		
3	d	**7**	a	**11**	d	**15**	a		
4	d	**8**	d	**12**	c	**16**	a		

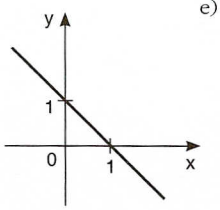
3 FUNÇÃO AFIM

EXERCÍCIOS

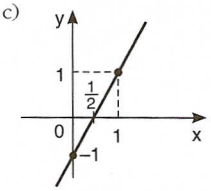
1 a)



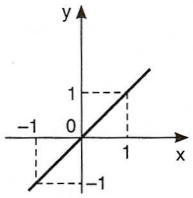
b)



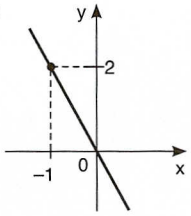
c)



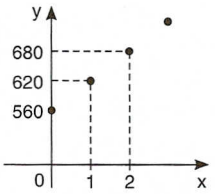
d)



e)



2 a) R$ 740,00
b) y = 560 + 60x
c)



3 112,5 kg **4** –8

5 a) $v = \frac{5m}{4}$ b) 24 g **6** 5

7 a) $v(t) = 5{,}2 + 0{,}18t$ b) 60 meses

8 a) 7,2 b) $n(x) = 10 - 0{,}4x$ c) 5

9 P(1000, 30) **10** $\frac{1}{2}$

11 a) $a = 2$ e $b = -5$
b) $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$
c) $a = \sqrt{2}$ e $b = 0$
d) $a = -2$ e $b = 1$

12 a) R$ 160 000,00 b) $y = 4x + 40\,000$

13 a) $S = \{34\}$
b) $S = \mathbb{R}$
c) $S = \left\{\frac{22}{3}\right\}$
d) $S = \left\{\frac{157}{22}\right\}$
e) $S = \{12\}$
f) $S = \varnothing$

14 11 **15** R$ 7 000,00

16 a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) 3 d) $-\frac{1}{2}$

17 $y = -2x + 6$ **18** R$ 3 600,00

19 crescentes: a, b, e
decrescentes: c, d, f

20 a) $m > -2$: crescente
$m = -2$: constante
$m < -2$: decrescente
b) $m < 4$: crescente
$m = 4$: constante
$m > 4$: decrescente

21 a) $y > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$
$y < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{3}{2}$
b) $y > 0 \Leftrightarrow x < \frac{2}{3}$
$y < 0 \Leftrightarrow x > \frac{2}{3}$
c) $y > 0 \Leftrightarrow x > 0$
$y < 0 \Leftrightarrow x < 0$
d) $y > 0 \Leftrightarrow x < 6$
$y < 0 \Leftrightarrow x > 6$

22 a) $x > -1$ b) $x > \frac{1}{2}$ c) $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$

23 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{9}{2}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{23}{18}\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{51}{113}\right\}$

24 a) A segunda opção.
b) A partir de 1h16min mensais de uso.

25 a) $s(n) = -732 + 40n$
b) em 23 meses
c) 19 meses

26 1 143 peças

27 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} < x < \frac{5}{3}\right\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x < 4\right\}$
d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$

28 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\}$ b) $S = \varnothing$

29 a) $L(x) = 3x + 200$ b) $34 \leq x < 67$

30 15 meses

31 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > \frac{3}{5}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{5}{2} \text{ ou } x > 2\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{7}{2} \leq x \leq \frac{1}{6}\right\}$

32 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{3}{4} \text{ ou } -\frac{2}{5} < x < 2\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \frac{4}{3} \text{ ou } x > 6\right\}$
c) $S = \varnothing$
d) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

33 2; 1 e 2

34 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > -\frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } x > \frac{3}{2}\right\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{5} < x \leq \frac{3}{4}\right\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{3}{4} < x < \frac{1}{2} \text{ ou } x > 4\right\}$

35 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1 \text{ ou } x > 2\}$
c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x \geq \frac{1}{2}\right\}$

36 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \text{ ou } 0 < x < 1\right\}$

37 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 4\}$

38 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

39 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**5**	e	**9**	e	**13**	c
2	a	**6**	b	**10**	d	**14**	b
3	a	**7**	d	**11**	e	**15**	c
4	a	**8**	a	**12**	b	**16**	d

17 a) V; b) V; c) V; d) F; e) V

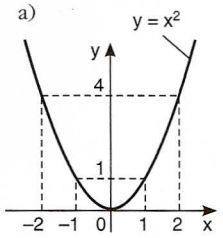
18 c **19** a

4 FUNÇÃO QUADRÁTICA

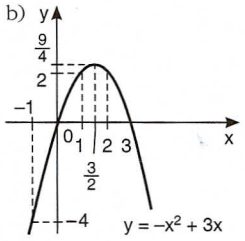
EXERCÍCIOS

1 a) $a = 1$, $b = -3$ e $c = 10$
b) $a = -2$, $b = -5$ e $c = 1$
c) $a = 3$, $b = 0$ e $c = -9$
d) $a = 1$, $b = 2$ e $c = 0$
e) $a = 3$, $b = -2\sqrt{3}$ e $c = 1$
f) $a = 2$, $b = 0$ e $c = -14$

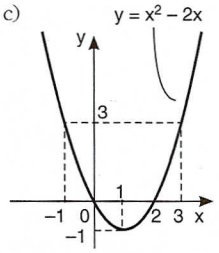
2 a)



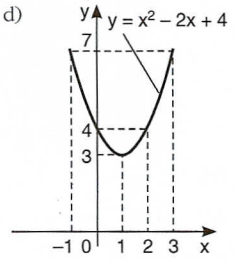
b)



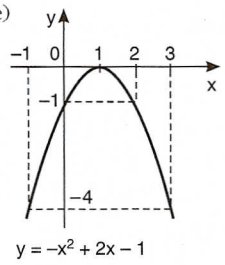
c)



d)



e)



3 a) 2 e $\frac{1}{3}$ d) 0 e $\frac{1}{2}$

b) $-\frac{1}{2}$ e 2 e) Não há.

c) $-\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$

4 a) $S = \left\{\frac{3}{2}, 5, 2\right\}$ c) $S = \{2\sqrt{3}\}$

b) $S = \{-3, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$ d) $S = \{-11, 11\}$

5 (x = 2 e y = 3) ou (x = 3 e y = 2)

6 1,5 **7** 4

8 a) V; isso ocorre às 19 h

b) F; o número de bactérias é 13 590

c) F; foram coletadas 100 bactérias

9 $m < \frac{9}{4}$ **10** $p > \frac{9}{8}$

11 $\Delta = 4 - 4 \cdot m \cdot \frac{1}{m} = 4 - 4 = 0$

12 $p = \frac{1}{3}$ → raiz é –2

p = –1 → raiz é 0

13 a) $y = \frac{x^2 - x}{2}$ b) 2 415 c) 30

14 a) $\frac{5}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) –5

15 a) $\frac{29}{4}$ b) $-\frac{29}{2}$ c) $\frac{155}{8}$

16 a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{3}{2}$

17 90 **18** m = –1

19 m = –5 **20** p = 3

21 a) valor mínimo: $-\frac{25}{8}$

ponto de mínimo: $\left(-\frac{5}{4}, -\frac{25}{8}\right)$

b) valor máximo: 12

ponto de máximo: (2, 12)

c) valor mínimo: 0

ponto de mínimo: (1, 0)

d) valor máximo: $\frac{7}{18}$

ponto de máximo: $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{18}\right)$

22 a) V b) V

c) F; Im = $\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 100\}$ d) V

e) F; o custo total é R$ 50 000,00

23 20 m **24** R$ 2 500,00

25 a) $p(x) = -\frac{1}{4}x + 60$ b) R$ 40,00

26 a) $L(x) = x^2 + 120x - 2\,700$

b) R$ 500,00 c) 60; R$ 900,00

27 a) F; empresa A → R$ 880,50

empresa B → R$ 750,00

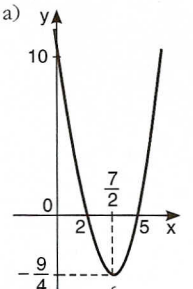
b) V; o vértice da função $-0{,}5n^2 + 35n + 250$ é: (35; 862,50)

c) V; para 50 passageiros *A* cobra R$ 880,50 e *B*, R$ 750,00

d) V; *A* levará 35 passageiros e *B* levará 17

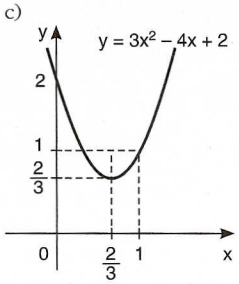
28 x = 30 m; y = 90 m

29 a)



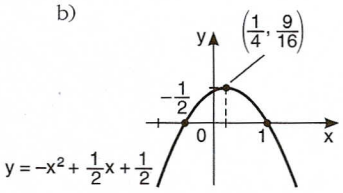
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{9}{4}\right\}$

c)



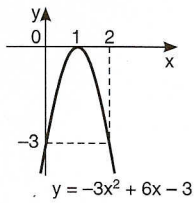
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant \frac{2}{3}\right\}$

b)



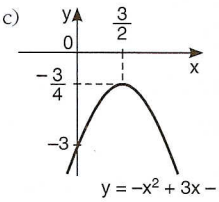
$Im = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leqslant \frac{9}{16}\right\}$

30 a)



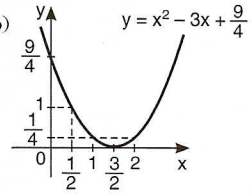
$y = -3x^2 + 6x - 3$

c)



$y = -x^2 + 3x - 3$

b)



31 3,5 m

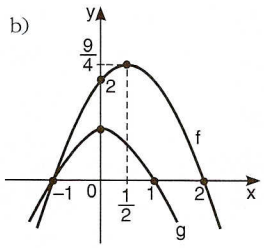
32 $y = -x + 3$

33 $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$

34 $y = x^2 - 2\sqrt{3}x + 3$

35 a) $y = \frac{3x}{2}$ b) 6º dia; 9 cm

36 a) –1 e 1 b)



37 a) $y > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$ ou $x > 2$

$y < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 2$

b) $y > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$

$y < 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 3$

c) $y > 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{3}{2}$

$\nexists$ x tal que $y < 0$

d) $y > 0 \Leftrightarrow -5 < x < 3$

$y < 0 \Leftrightarrow x < -5$ ou $x > 3$

38 a) $y < 0, \forall x \in \mathbb{R}$

b) $y < 0 \Leftrightarrow x \neq 2$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y > 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, y > 0$

$\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $y < 0$

d) $y > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 0$

$y < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$

39 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 1$ ou $x > 2\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x < 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right\}$

d) $\mathbb{R}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}\}$

40 a) $S = \emptyset$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

c) $S = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x < \sqrt{2}\}$

e) $S = \emptyset$

41 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0$ ou $x \geq 8\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -7$ ou $x > 7\}$

c) $S = \{0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$

e) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -3$ ou $x > 7\}$

42 7

43 a) De 1990 a 2001. b) A partir de 2012.

44 a) 220 b) $10 \leq x \leq 20$

45 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq -1$ ou $1 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < 0$ ou $0 < x \leq 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | 1 < x < 4\}$

46 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | 2 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | -4 < x < -3$ ou $3 < x < 4\}$

47 $0 < x < 2$

48 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | \frac{-3}{2} < x < \frac{-1}{2}$ ou $0 < x < \frac{1}{2}\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -3$ ou $x \geq 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1$ ou $x > 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 3\}$

49 $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x \leq \frac{-1}{2}$ ou $\frac{1}{2} \leq x \leq 3\right\}$

50 a) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{-5}{4}$ ou $-\frac{1}{2} < x < 1$ ou $x > 2\right\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -3$ ou $x \geq 0\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < \frac{1}{2}$ ou $x > \frac{2}{3}\right\}$

51 a) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 0\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < -1$ ou $0 \leq x < 1\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} | x > 2\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 0$ ou $x > 1\}$

52 a) (7, 24) b) $S = \{x \in \mathbb{R} | x < 5$ e $x \neq 1\}$

53 $\{m \in \mathbb{R} | -2 < m < 2\}$

54 $\{m \in \mathbb{R} | m < -1\}$

55 15

56 $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

57 a) $\left\{x \in \mathbb{R} | x < \frac{-1}{6}$ ou $x > 1\right\}$

b) $\left\{x \in \mathbb{R} | \frac{-5}{3} \leq x \leq 1$ ou $x \geq 7\right\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} | x < -3$ ou $2 < x \leq 5\}$

58 $\{a \in \mathbb{R} | -6 < a < 6\}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**6**	d	**11**	a	**16**	c	**21**	c
2	c	**7**	c	**12**	e	**17**	b	**22**	a
3	a	**8**	d	**13**	e	**18**	c		
4	e	**9**	e	**14**	e	**19**	e		
5	c	**10**	b	**15**	d	**20**	c		

5 FUNÇÃO MODULAR

EXERCÍCIOS

1 a) 5 b) –7 c) 1 d) $\sqrt{2}$

2 a) 6 b) 2 c) $\frac{5}{3}$

3 a) R$ 400,00; R$ 755,00

b) $g(x) = \begin{cases} 80x, \text{ se } 0 \leq x \leq 7 \\ 65x + 105, \text{ se } x > 7 \end{cases}$

4 a) R$ 12,10

b) $p(x) = \begin{cases} 0{,}10x, \text{ se } 0 < x \leq 100 \\ 3 + 0{,}07x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$

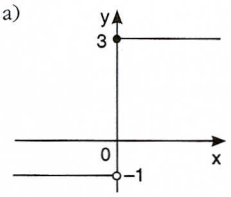
5 a) –9 b) $2 + 5\sqrt{2}$ c) $\frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$

6 a) R$ 681,00; R$ 918,00

b) $p(x) = \begin{cases} 30x, \text{ se } 1 \leq x \leq 20 \\ 27x + 60, \text{ se } 21 \leq x \leq 30 \\ 24x + 150, \text{ se } x > 30 \end{cases}$

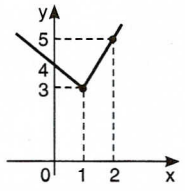
c) 27

7 a)



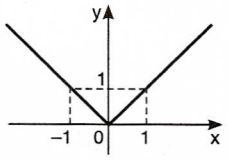
Im = {–1, 3}

c)



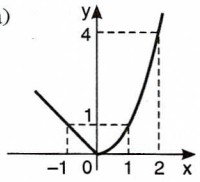
Im = {y ∈ ℝ | y ≥ 3}

b)



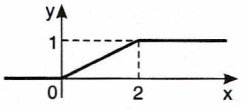
Im = {y ∈ ℝ | y ≥ 0}

8 a)



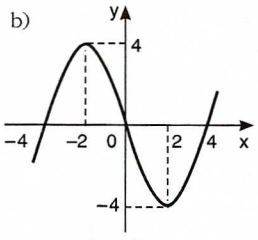
Im = {y ∈ ℝ | y ≥ 0}

c)



Im = {y ∈ ℝ | 0 ≤ y ≤ 1}

b)

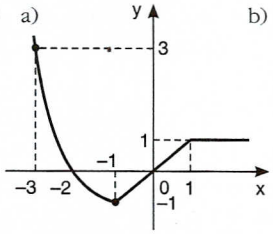


Im = ℝ

9 a) $y = \begin{cases} 2, \text{ se } x \leq 0 \\ 2 - x, \text{ se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 1 + x, \text{ se } x < 1 \\ -x + 2, \text{ se } x \geq 1 \end{cases}$

10 a)



b) Im = {y ∈ ℝ | y ≥ –1}

11 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{3}$

12 a) 7 c) 0 e) $2 - \sqrt{3}$ g) 0

b) 3 d) 0,2 f) $-6 + 2\pi$

13 0 **14** 3

15 a) 10 b) –7 c) 3x – 5 d) 3x – 1

16 a) 0 b) 1 c) 63 d) 3

17 –1

18 a) 4 ppm c) 10 anos

b) 4,8 ppm d) $C(t) = 4 + 0{,}05t^2$

19 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

20 a) 8 b) 6 c) 2 **21** –x

22 a) S = {–2, 2} c) $S = \{1, -1, \sqrt{5}, -\sqrt{5}\}$

b) S = {–1, 3}

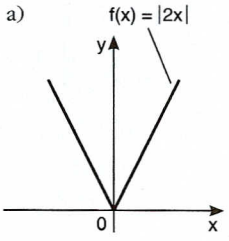
23 a) f(x) = 3x + 5 b) f ∘ f(x) = 9x + 20

24 g(x) = x – 2

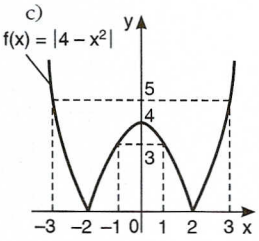
25 a) $s = 65 + \frac{43p + 7{,}5}{8}$ b) 68 centenas

26 15

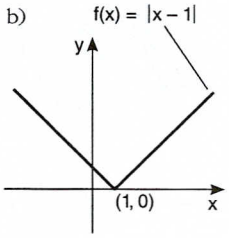
27 a)



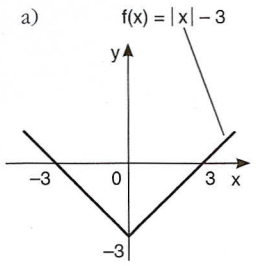
c)



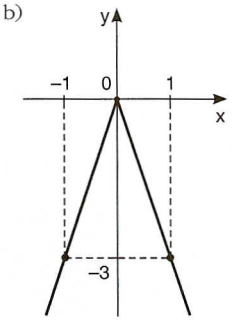
b)



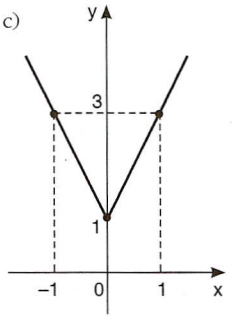
28 a)



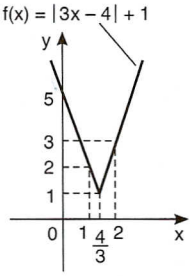
b)



c)

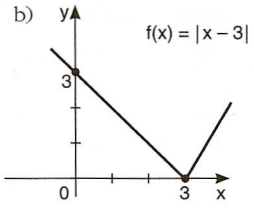


d)

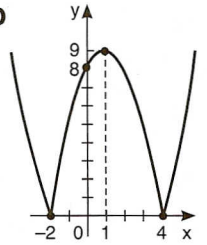


29 a) $2\sqrt{2}$

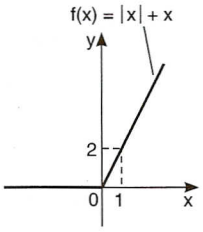
b)



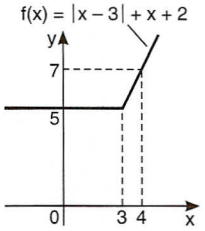
30



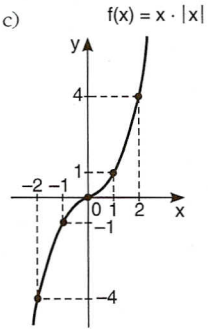
31 a)



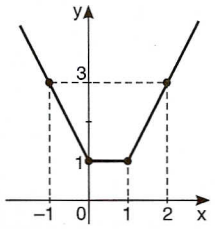
b)



c)

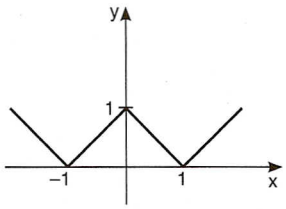


32



33 a) F; $f(-4) = |1 - |-4|| = |1 - 4| = 3$

b) V; veja o gráfico de f:



c) F; veja o gráfico

d) V; as soluções são: 0, –2 e 2

34 a) $S = \{-4, 4\}$

b) $S = \{2, -1\}$

c) $S = \{1, 2, 3, 4\}$

d) $S = \varnothing$

35 a) $S = \left\{\frac{16}{5}, 6\right\}$

b) $S = \{1, 3\}$

c) $S = \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq \frac{3}{4}\right\}$

36 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$

37 250º e 50º dias

38 $S = \{-6, -1, 0, 1, 6\}$

39 5

40 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ ou } x \geq 4\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ ou } x \geq 4\}$

d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < \frac{13}{3}\right\}$

41 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } -1 < x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1 \text{ ou } 2 \leq x \leq 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

42 a) $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 3\}$

43 a) 20 e 30

b) no dia 25; 300 pessoas

c) do dia 1º ao dia 22 e nos dias 28, 29 e 30

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 4\}$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**6**	a	**11**	d	**16**	c	**21**	e
2	b	**7**	e	**12**	a	**17**	c		
3	c	**8**	c	**13**	c	**18**	d		
4	b	**9**	b	**14**	a	**19**	a		
5	c	**10**	b	**15**	a	**20**	b		

6 FUNÇÃO EXPONENCIAL

EXERCÍCIOS

1 a) 16 c) –16 e) –1

b) –16 d) 1 f) $\frac{9}{25}$

2 $E = \frac{9}{4}$

3 a) 5 832 b) 12 321 c) 2 401

4 a) $\frac{1}{8}$ c) $-\frac{1}{125}$ e) $\frac{1}{27}$
b) 2 d) 100 f) 81

5 a) 4 b) 19 c) 6

6 1 **7** $\frac{82}{3}$

8 $\left\{a \in \mathbb{R} \mid a > \frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right\}$

9 a) 8 b) 2 c) 1

10 a) $-\sqrt{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) $6\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$

11 $1 < \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{6} < \sqrt{5}$

12 a) $3\sqrt{7}$ b) 2 c) $\sqrt{\frac{6}{5}}$ d) 2

13 a) $3 + 2\sqrt{2}$ c) 9
b) $5 - 2\sqrt{6}$ d) $20 + 14\sqrt{2}$

14 a) 7 b) 2

15 a) 3 b) $2 \cdot \sqrt[4]{2}$ c) $\sqrt[6]{32}$

16 a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
b) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ d) $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$

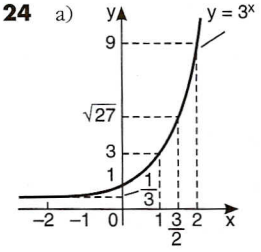
17 a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $\frac{5+\sqrt{5}}{4}$
b) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ d) $\frac{4 + 2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}{6}$

18 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ **19** 1 **20** $\frac{14 - 7\sqrt{3}}{3}$

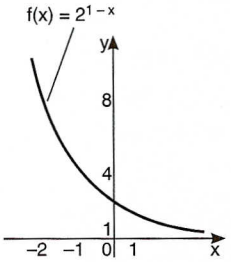
21 a) 27 c) $\frac{1}{16}$ e) 100
b) 16 d) $\frac{1}{3}$

22 2^{22} **23** a) 0,44 m² b) 22,4 kg

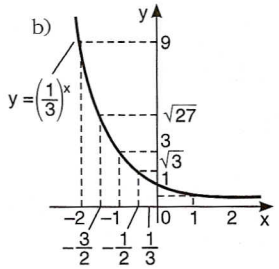
24 a)



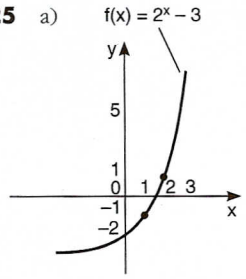
c)



b)

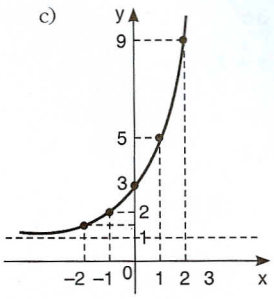


25 a)



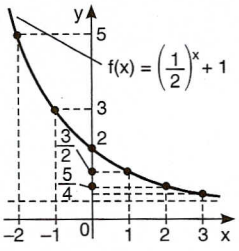
Im = {y ∈ ℝ | y > −3}

c)



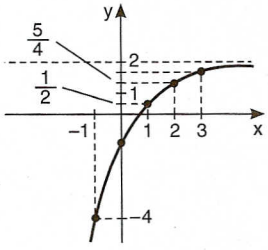
Im = {y ∈ ℝ | y > 1}

b)



Im = {y ∈ ℝ | y > 1}

d)



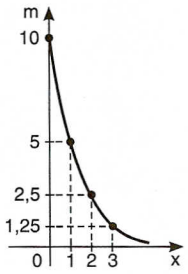
Im = {y ∈ ℝ | y < 2}

26 p = 1 e q = 2

27 a) a = 1 e b = 2
b) Im = {y ∈ ℝ | y > 1} c) $\frac{3}{2}$

28 2^{30} **29** a) 552 b) 300; sim

30 a) 5 g; 2,5 g
b) $m = \frac{10}{2^x}$



c) 0,3125 g e $10 \cdot 2^{-20}$ g

31 a) V b) V
c) F; f(1) = 37 e g(1) = 20
d) F; observe que g(2) = f(2); construa os gráficos das duas funções.

32 a) S = {5} c) S = {−3} e) S = {−1}
b) S = {3} d) $S = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

33 a) $S = \left\{\frac{8}{3}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{11}{16}\right\}$ e) S = {−5}
b) S = {1} d) $S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$.

34 3 anos

35 a) R$ 60 000,00 c) R$ 48 600,00
b) 10% d) 5 anos

36 a) 3,75 g b) 224 anos

37 a) 200 b) $\frac{2}{3}$

c) Aproximadamente $1{,}3 \cdot 10^7$ bactérias.

38 a) $S = \left\{\frac{2}{5}\right\}$ c) $S = \left\{-\frac{19}{8}\right\}$

b) $S = \{5\}$ d) $S = \{-8\}$

39 a) $S = \{4\}$ c) $S = \{2\}$

b) $S = \{1\}$ d) $S = \{-2, 1\}$

40 $x = 3$

41 a) $S = \{(2, -3)\}$ c) $S = \{(2, -1)\}$

b) $S = \{(1, 3)\}$

42 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

43 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -3\}$

e) $S = \varnothing$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -6\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{4}\right\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{3}{2}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{1}{2}\right\}$

f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\}$

45 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < \sqrt{3}\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{9}{8}\right\}$

46 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$

47 a) 3 000 e $b = \frac{3}{2}$

b) 6 000

e) 7 dias

48 $a < \frac{1}{3}$

49 a) $t = 0 \rightarrow x^2 + x + 512 = 0$ e $\Delta = -2\,047$

b) 3

TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**6**	a	**11**	a	**16**	d	**21**	d
2	a	**7**	c	**12**	e	**17**	b	**22**	c
3	a	**8**	b	**13**	e	**18**	b	**23**	c
4	c	**9**	e	**14**	c	**19**	c	**24**	c
5	b	**10**	d	**15**	b	**20**	b		

7 LOGARITMOS

EXERCÍCIOS

1 a) 3 c) 3 e) $-\frac{7}{2}$

b) 6 d) $\frac{5}{3}$ f) 8

2 a) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{12}$ e) -3

b) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{1}{2}$

3 a) $\frac{1}{6}$ b) -2 c) 2

4 a) 2 b) 4 c) 10 d) $\frac{e^2}{3} \cong 2{,}46$

5 $y = \frac{1}{6}$ **6** 27 **7** $\frac{1}{2}$

8 a) -3 b) $-\frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{2}$

9 a) 5 b) -1 c) 4 d) 0 e) $\frac{7}{2}$

10 a) $\frac{a}{2} - 2b$ b) $2 + a + \frac{b}{2}$ c) $1 + a - \frac{b}{3}$

11 $y = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ **12** $x = \frac{a^2b}{c^3}$ **13** $S = \{-3, 3\}$

14 a) $a + b$ e) $1 - a$

b) $2a + b$ f) $a + 2b + 1$

c) $b - a$ g) $\frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b$

d) $-2a$ h) $3 - a$

15 a) 2,301 b) 0,1455 c) $-4{,}899$

16 a) $1 - k$ c) $k + 3$

b) $\frac{2}{3}k$ d) $3k + 1$

17 7,26

18 Sim; $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow xy = x + y$ e $\log(xy) = \log(x + y)$, isto é, $\log x + \log y = \log(x + y)$.

19 $a - 1$ **20** 1

21 a) $\frac{\log 3}{\log 2} \cong 1{,}58$ c) $\frac{\frac{1}{2}}{\log 3} \cong 1{,}048$

b) $\frac{\log 2}{2} \cong 0{,}15$

22 a) $\frac{\ell n\ 7}{\ell n\ 2} \cong 2{,}8$ b) $\frac{\ell n\ 3}{\ell n\ 5} \cong 0{,}68$

23 0,696

24 a) $T = \frac{2S}{3}$

b) T; pois $3 < S < 4$ e $2 < T < \frac{8}{3}$.

25 $-\frac{2}{x}$

26 a) $\frac{a + 2b}{a + b}$ b) $\frac{2 - 4a}{2a + b}$ **27** m = 103

TESTES DE VESTIBULARES

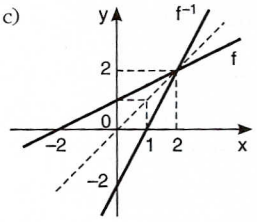
1 b **4** d **7** c **10** d
2 a **5** e **8** c
3 d **6** d **9** b

8 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

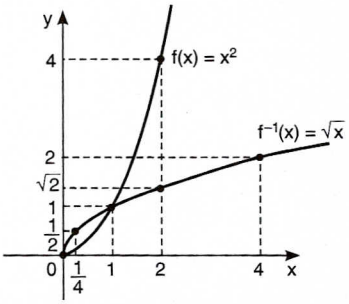
EXERCÍCIOS

1 a) sim; $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ d) sim; $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
b) não; f(–1) = f(1) = 1 e) não; f(1) = f(–1) = 1
c) sim; $f^{-1}(x) = \log x$ f) sim; $f^{-1}(x) = e^x$

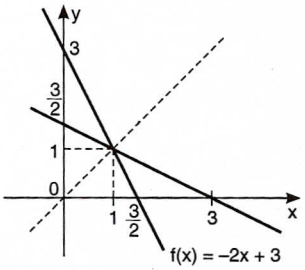
2 a) 4; –2
b) $f^{-1}(x) = 2x - 2$
c)



3 a) II
b) $f^{-1}(x)$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$
$f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
c) y = 4, por exemplo, é imagem de x = 2 e de x = –2



4 a)

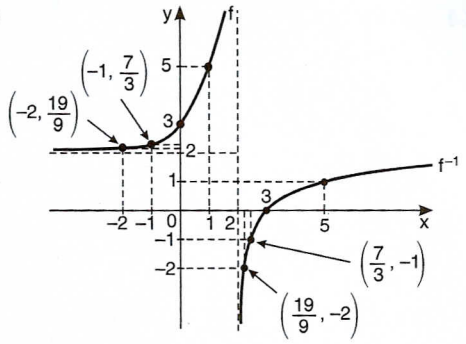


b) (1, 1)

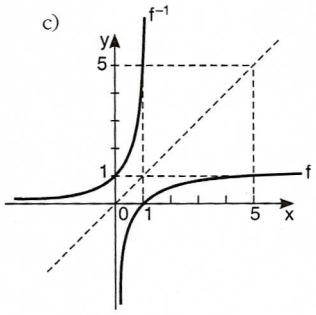
5 $y^{-1} = \frac{3x + 5}{2x - 1}$; $x \neq \frac{1}{2}$

6 a) $f^{-1}(x) = \log_3 (x - 2)$

b)



7 a) 2; 25
b) $f^{-1}(x) = 5^x$
c)



8 a) 2 b) 3; $\frac{3}{2}$

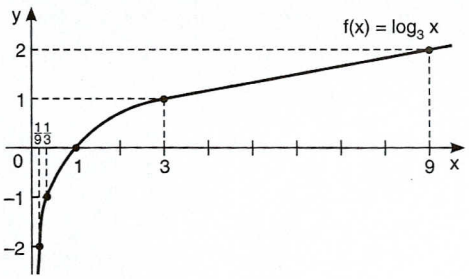
9 a) F; t = log h
b) V; $t = \log 10^9 = 9$ s
c) F; alcançaria $100\sqrt{10} \cong 316$ m

10 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$
b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x > 2\}$
c) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2 \text{ e } x \neq 1\}$

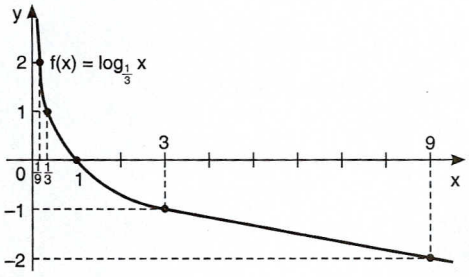
11 a) 200 b) 8 meses

12 a) $60 \cdot (1{,}04)^9 \cong 85{,}4$ bilhões
b) $\log_{1,04} 2 \cong 18 \rightarrow$ ano de 2014;
$\log_{1,04} 3 \cong 28 \rightarrow$ ano de 2024;
$\log_{1,04} x$

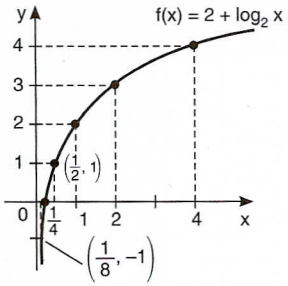
13 a)



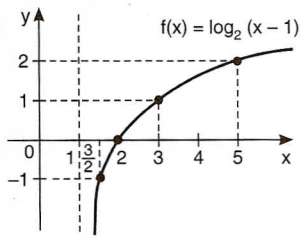
b)



14 a)



b)



15 36

16 a) F; $9 < \pi^2 \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \log_2 9 < \log_2 \pi^2$

b) V; $0{,}1 < 2 \overset{0 < \text{base} < 1}{\Longrightarrow} \log_{0,2} 0{,}1 > \log_{0,2} 2$

c) V; $5 > 1 \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \log_8 5 > \log_8 1$, isto é, $\log_8 5 > 0$

d) F; $\frac{1}{2} < 1 \overset{0 < \text{base} < 1}{\Longrightarrow} \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > \log_{\frac{1}{3}} 1$, isto é, $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2} > 0$

e) F; pois $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{3}$

f) V; pois $\sqrt{3} > \frac{8}{5} \overset{\text{base} > 1}{\Longrightarrow} \ell n\sqrt{3} > \ell n\left(\frac{8}{5}\right)$

17 Como $0 < a < 1$ e $2c^2 > 1$, $\log_a 2c^2 < 0$. Pelo gráfico, $c > 0$, de modo que o produto é positivo.

18 a) $S = \{\log_2 3\}$

b) $S = \left\{\frac{1}{2}\ \ell n\ 3\right\}$

c) $S = \{-\log_3 4\}$

d) $S = \{\ell n\ 2 - 1\}$

e) $S = \{1 - \log 5\}$

f) $S = \{-2 - \log 2\}$

19 a) R$ 11250,00 b) 3 anos

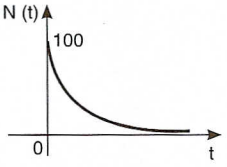
20 a) F; 100

b) V; é $\frac{100}{16}$

c) V; 25 bactérias

d) V; 60 bactérias

e) F



21 a) $x = \ell n \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ou $x = \ell n \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

b) f é par : $f(-x) = f(x)$

22 20 anos

23 a) $S = \{3\}$ b) $S = \{3, 7\}$ c) $S = \{6\}$

24 a) $S = \{19\}$ b) $S = \{3\}$ c) $S = \left\{-\frac{1}{2}, 5\right\}$ d) $S = \{2\}$

25 a) $S = \{16\}$ b) $S = \{64\}$ c) $S = \{13\}$

26 a) $S = \{64, 2\}$ b) $S = \{2, 16\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{1000}, 10000\right\}$

27 a) $S = \{2\}$ b) $S = \{1\}$ c) $S = \{\sqrt{2}\}$

28 a) $S = \{2\}$ b) $S = \{5\}$ c) $S = \{4\}$

29 $S = \{3\}$ **30** $S = \{(1, 10)\}$

31 $S = \left\{(2, 1); \left(3, \frac{2}{3}\right)\right\}$

32 a) $S = \{7\}$ b) $S = \{9, \sqrt{3}\}$ c) $S = \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

33 $S = \{-2\}$ **34** $S = \{1\}$

35 a) população $A \rightarrow$ 2000 e 6000
população $B \rightarrow$ 3000 e 5000

b) após 3 anos; cidade A

36 a) $S = \{4\}$ b) $S = \mathbb{R}_+^*$

37 $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ **38** $S = \left\{\left(32, \frac{1}{4}\right)\right\}$

39 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \log_3 7\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \log_4 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \ell n \frac{1}{4}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_{0,4} 2\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \log_8 \frac{5}{2}\right\}$

40 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$

b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$

c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{2}{5} < x \leqslant \frac{9}{5}\right\}$

d) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 8\}$

e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{1}{3}\right\}$

41 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ ou } x > 3\}$

42 a) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{2} < x < -1 \text{ ou } 1 < x < \sqrt{2}\}$

43 $S = \{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < 16\}$

44 a) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < e^{-\frac{3}{2}} \text{ ou } x > e^2\}$

b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{9} < x < 243\right\}$

45 $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 1 - 2\sqrt{2} \text{ ou } 1 + 2\sqrt{2} < x < 4\}$

46 $0 < m \leqslant \frac{1}{3}$ ou $m \geqslant 3$

TESTES DE VESTIBULARES

1	c	**7**	e	**13**	c	**19**	c
2	a	**8**	b	**14**	d	**20**	c
3	b	**9**	a	**15**	a	**21**	e
4	e	**10**	a	**16**	b		
5	b	**11**	d	**17**	b		
6	e	**12**	a	**18**	e		

9 PROGRESSÕES

EXERCÍCIOS

1 (5, 7, 9, 11, 13)

2 a) $\frac{5}{54}$ b) 11º termo

3 a) –99 b) 2; 9º termo

4 (10, 8, 6, 4, 2, 0) **5** 34

6 Note, inicialmente, que $a_n = (n - 1)\ n\ (n + 1)\ (n^2 + 1)$.
a) V, pois a_n contém o produto de 3 números naturais consecutivos.
b) F, tome n = 6.
c) V, pois para todo $n \in \mathbb{N}^*$, n é divisor de a_n.

7 a) 7 b) 104

8 a) r = 4; crescente
b) r = –5; decrescente
c) r = 0; constante
d) r = –6; decrescente
e) $r = \frac{5}{2}$; crescente
f) r = 6; crescente

9 151 **10** 216

11 a) $a_n = 4n$, $n \in \mathbb{N}^*$ b) 200

12 –3

13 a) $a_n = 4n - 55$ b) 105 c) $a_{14} = 1$

14 1 **15** (–20, –8, 4, 16, 28, ...)

16 a) 156 cm c) $19\sqrt{2}$ cm
b) 3721 cm²

17 111 **18** a) Sim; $r = 2^x$ b) x = 2

19 m = 6 ou m = –3 **20** x = 4

21 sim; $4 - 3\sqrt{2}$ **22** 29

23 (–22, –16, –10, –4, 2, 8, 14, 20)

24 28 **25** 273 **26** 10^6

27 (8, 13, 18) **28** 32 cm

29 30°, 70° e 110° **30** R$ 200,00

31 $\left(3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}, 9\right)$ **32** 210

33 205 **34** a) 6,4 b) 3,4

35 36000 **36** 10 **37** $-\ell n\ 2$

38 (2, 7, 12, 17, ...) **39** 25

40 R$ 680,00 e R$ 18560,00

41 a) 4887 b) 210

42 a) 22 b) $\frac{17}{2}$ c) $\frac{81}{2}$

43 20 **44** 1 **45** x = 100

46 a) 2 c) 9 e) $\sqrt{5}$
b) –4 d) $\frac{1}{4}$

47 $\frac{25}{4}$ **48** $\frac{64}{729}$

49 100 **50** 152 metros

51 a) 16000 b) 125

52 40 metros **53** –15

54 $-\frac{7}{10}$ **55** 4096

56 a) $\frac{1}{8}$ b) $-\frac{3}{2}$

57 x = 1 **58** 9

59 1, 4 e 16 **60** sim; $q = \sqrt{2}$

61 sim; $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ **62** 3

63 a) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ b) $-1 - \sqrt{5}$

64 Quando r = 3, a = 9, b = 27 e c = 81.
Quando $r = \frac{1}{3}$, a = 81, b = 27 e c = 9

65 a) $a_n = 3^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
b) 3^{210}

66 a) 2 b) 12

67 $a = \frac{9}{2}$ e b = 6

69 $\frac{2}{3}$ **70** 2 **71** 3280

72 a) 10 b) 2046 c) 682

73 9 **74** 242 **75** 8

76 $\frac{10^n + 2}{3}$

77 a) $a_1 = 2$ e $a_2 = 6$
b) q = 3
c) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

78 a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{1}{90}$

79 $\frac{7}{2}$

80 a) $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$ b) $S = \{-1\}$

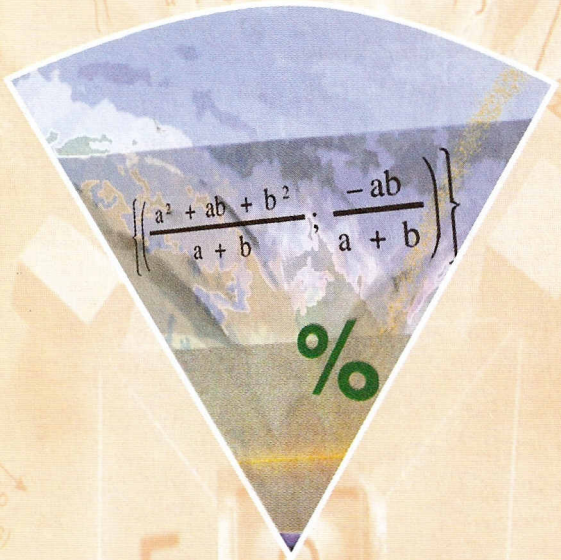
81 a) $\frac{4}{9}$ c) $\frac{43}{99}$
b) $\frac{16}{9}$ d) $\frac{46}{45}$

82 $4 + 2\sqrt{2}$ **83** 16

84 a) $8\pi r$ b) $\frac{16\pi r^2}{7}$

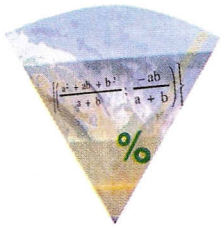
TESTES DE VESTIBULARES

1	d	**7**	d	**13**	c	**19**	c	**25**	a
2	d	**8**	c	**14**	e	**20**	e	**26**	a
3	a	**9**	c	**15**	a	**21**	a		
4	b	**10**	c	**16**	c	**22**	a		
5	b	**11**	a	**17**	d	**23**	d		
6	b	**12**	c	**18**	d	**24**	e		



• MATEMÁTICA FINANCEIRA •

Parte 2



10

NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

1 ○ Razão e proporção

Sejam dois números reais a e b, com $b \neq 0$. Chama-se *razão entre a e b* (nessa ordem) o quociente $a : b$, ou $\frac{a}{b}$.

O número a é denominado *antecedente* (numerador) e b é o *conseqüente* (denominador).

Exemplo 1

Na fila de um guichê de venda de ingressos em um estádio de futebol, havia 48 torcedores, sendo 20 palmeirenses e 28 corintianos.

A razão entre o número de palmeirenses e o número de corintianos é $\frac{20}{28} = \frac{5}{7}$, o que significa que "para cada 5 palmeirenses há 7 corintianos".

A igualdade entre duas razões recebe o nome de *proporção*.

Na proporção $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$ (lê-se: "3 *está para* 5 *assim como* 6 *está para* 10"), os números 3 e 10 são chamados *extremos*, e os números 5 e 6 são chamados *meios*.

Observemos que o produto $3 \times 10 = 30$ é igual ao produto $5 \times 6 = 30$, o que caracteriza a *propriedade fundamental* das proporções:

"Em toda proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos".

Exercícios

1 Num concurso público, constatou-se que a razão entre o número de homens e o número de mulheres era $\frac{3}{5}$. Se o total de inscritos era 1600 pessoas, determine:

a) o número de mulheres que fizeram o concurso;

b) a razão entre o número de aprovados e o número total de inscritos, sabendo que $\frac{5}{12}$ dos homens foram aprovados e $\frac{17}{25}$ das mulheres *não* conseguiram aprovação.

2 Até pouco tempo, de cada 5 crianças que nasciam no mundo uma era chinesa e, entre as chinesas, de cada 5 crianças 3 eram meninas. Sabendo-se que para as outras nacionalidades havia equilíbrio entre o número de meninas e o de meninos, pergunta-se:

a) Nascidas 250 crianças, quantas meninas chinesas seriam esperadas?

b) Qual era a razão entre o número de meninos recém-nascidos chineses e o das recém-nascidas de outras nacionalidades?

3 (Unicamp-SP) Dois estudantes A e B receberam Bolsas de Iniciação Científica de mesmo valor. No final do mês, o estudante A havia gasto $\frac{4}{5}$ do total de sua Bolsa, o estudante B havia gasto $\frac{5}{6}$ do total de sua Bolsa, sendo que o estudante A ficou com R$ 8,00 a mais que o estudante B.

a) Qual era o valor da Bolsa?
b) Quantos reais economizou cada um dos estudantes naquele mês?

4 Um ônibus sai da cidade X em direção à cidade Y. Após percorridos $\frac{4}{7}$ da distância entre X e Y, ele faz uma parada para lanche. Do local da parada até a cidade Y são mais 210 km.

a) Qual é a distância entre X e Y?
b) Quantos quilômetros são percorridos até a parada?

5 Duas companhias aéreas oferecem recompensas para seus clientes mais fiéis: a empresa A concede um trecho grátis ao cliente que completar dez vôos, e a empresa B oferece a décima passagem ao cliente que tiver feito uso de seus serviços por nove vezes. Admita que o preço da passagem nas duas empresas seja igual a x reais.

a) Qual companhia oferece mais vantagens a seus clientes?
b) Supondo-se que a menos generosa passe a praticar habitualmente preços $\frac{1}{40}$ menores, aquela empresa conseguirá oferecer tantas vantagens quanto esta? Justifique.

6 (Unisinos-RS) Colocando-se 27 litros de gasolina no tanque de um carro, o ponteiro do marcador, que indicava $\frac{1}{4}$ do tanque, passa a indicar $\frac{5}{8}$. Qual é a capacidade total desse tanque de gasolina?

7 (UF-RN) Um café é preparado e, logo depois, é servido em quatro xícaras, nas quais é colocado o mesmo tipo de açúcar.
A primeira xícara recebe 50 ml de café e 2 g de açúcar; a segunda, 70 ml de café e 3 g de açúcar; a terceira, 90 ml de café e 4 g de açúcar; a quarta, 120 ml de café e 5 g de açúcar.
Em qual das xícaras o café estará mais doce?

2 ○ Porcentagem

A razão cujo denominador é 100 recebe o nome de *razão centesimal*. São exemplos de razões centesimais:

$$\frac{27}{100} \qquad \frac{4}{100} \qquad \frac{57{,}3}{100} \qquad \frac{215}{100}$$

Podemos representar as razões centesimais na forma decimal e também em taxas percentuais, como é mostrado a seguir:

$\frac{27}{100} = 0{,}27 = 27\%$ $\quad$ $\frac{4}{100} = 0{,}04 = 4\%$ $\quad$ $\frac{57{,}3}{100} = 0{,}573 = 57{,}3\%$ $\quad$ $\frac{215}{100} = 2{,}15$ ou 215%

Exemplo 2

Em uma *blitz* ocorrida em uma rodovia, dos 25 automóveis fiscalizados 4 apresentaram documentação irregular. A razão entre o número de automóveis com documentação irregular e o número total de automóveis é:

$$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\%$$

O número $0{,}16 = \frac{16}{100} = 16\%$ é a taxa percentual de automóveis com problemas na documentação.

Exemplo 3

Os 360 funcionários de uma empresa submeteram-se a exames clínicos para verificação dos níveis de colesterol no sangue. Desse total, 35% apresentaram taxas acima do limite sugerido pelo teste.

Para calcularmos o número de funcionários com taxa superior à recomendada, podemos estabelecer a proporção:

$$\begin{cases} 360 \text{ —— } 100\% \\ x \text{ —— } 35\% \end{cases} \Rightarrow \frac{360}{x} = \frac{100}{35} \Rightarrow x = 126 \text{ funcionários}$$

Poderíamos calcular diretamente 35% de 360 = 0,35 · 360 = 126.

Exemplo 4

Uma calça é vendida por R$ 36,00. Se seu preço for aumentado em 15%, quanto passará a custar?

Temos:

$$\text{novo preço} = \underbrace{\text{preço antigo}}_{\downarrow} + \underbrace{\text{aumento}}_{\downarrow}$$

$$\text{novo preço} = 36 + 0{,}15 \cdot 36 = 36 \cdot (1 + 0{,}15) = 1{,}15 \cdot 36 = 41{,}40$$

Observe que o preço inicial fica multiplicado por 1,15, ou 1 + 0,15.

Exemplo 5

Uma agência de turismo anunciou redução de 28% no preço de seus pacotes. Se 3 dias em Buenos Aires custavam U$ 340,00, quanto passará a custar essa viagem?

Temos:

$$\text{novo valor} = \underbrace{\text{valor antigo}}_{\downarrow} - \underbrace{\text{desconto}}_{\downarrow}$$

$$\text{novo valor} = 340 - 0{,}28 \cdot 340 = 340(1 - 0{,}28) = 0{,}72 \cdot 340 = 244{,}80$$

Observe que o preço original fica multiplicado por 0,72, ou 1 – 0,28.

Exemplo 6

O gráfico ao lado compara o sentimento de orgulho de ser brasileiro antes e depois dos atentados terroristas nos EUA em setembro de 2001. Há duas formas de expressar tal aumento:

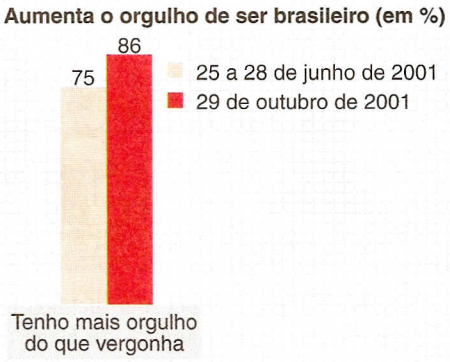
1ª) Dizemos que houve uma variação (aumento) de 86 – 75 = 11 *pontos percentuais*.

2ª) O *aumento percentual*, em relação à data anterior ao atentado, é dado por:

$$\frac{86 - 75}{75} \cong 0{,}147 = 14{,}7\%$$

Nesse caso, poderíamos simplesmente fazer:

$$\frac{86}{75} \cong 1{,}147 = 1 + 0{,}147 \rightarrow 14{,}7\% \text{ de aumento}$$



Fonte: *Folha de S.Paulo*, 4/11/2001.

Exemplo 7

O gráfico ao lado compara a queda do número de seqüestros relâmpagos na cidade de São Paulo, causada pelo fechamento dos caixas eletrônicos 24 horas, durante a crise energética de 2001.

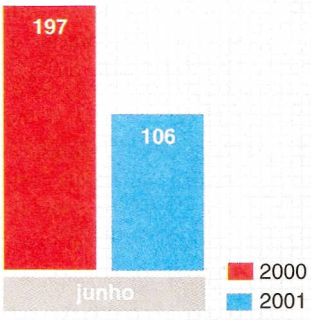
Vamos calcular a *redução percentual* registrada.

Temos:

$$197 - 106 = 91 \text{ (valor absoluto da redução)}$$

$$\frac{91}{197} = 0{,}4619 = 46{,}19\% \text{ (taxa de redução percentual)}$$

Poderíamos simplesmente fazer $\frac{106}{197} = 0{,}538$, o que significa uma redução de 1 – 0,538 = 0,4619 = 46,19%.



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 14/8/2001.

Exercícios

8 (UF-CE) Um vendedor recebe, a título de rendimento mensal, um valor fixo de R$ 160,00 e mais um adicional de 2% das vendas por ele efetuadas no mês. Com base nisso, responda:

a) Qual é o rendimento desse vendedor em um mês no qual o total de vendas feitas por ele foi de R$ 8 350,00?

b) Qual é a função que expressa o valor do seu rendimento mensal em função de sua venda mensal?

9 O preço de venda de uma jaqueta é de R$ 42,00. Quanto passará a custar essa jaqueta se a loja anunciar:

a) um desconto de 5%?

b) um acréscimo de 14%?

10 Após aumento de 12,5%, a passagem de ônibus em uma capital nordestina passou a custar R$ 0,90. Qual era o valor da passagem?

11 Um usuário recebeu uma conta telefônica 120% maior que a última conta, já paga. Assustado, recorreu à concessionária, que informou ter havido engano na cobrança, anunciando redução do valor apresentado à metade. Ainda assim, qual foi o acréscimo percentual do valor a pagar em relação ao da conta anterior?

12 Depois de muita insistência, um cliente conseguiu 12% de desconto na compra de uma TV, pagando então R$ 440,00. Qual era o preço sem desconto dessa TV?

13 **HAGAR, o horrível** — **Chris Browne**

(*O Globo*, 4/9/2001.)

Supondo que a conta seja dividida entre dois, e não entre três, e considerando o percentual da conta que cada um dos amigos de Hagar irá pagar, verifica-se um aumento de n pontos percentuais.

a) Determine n.

b) Qual é o aumento percentual verificado?

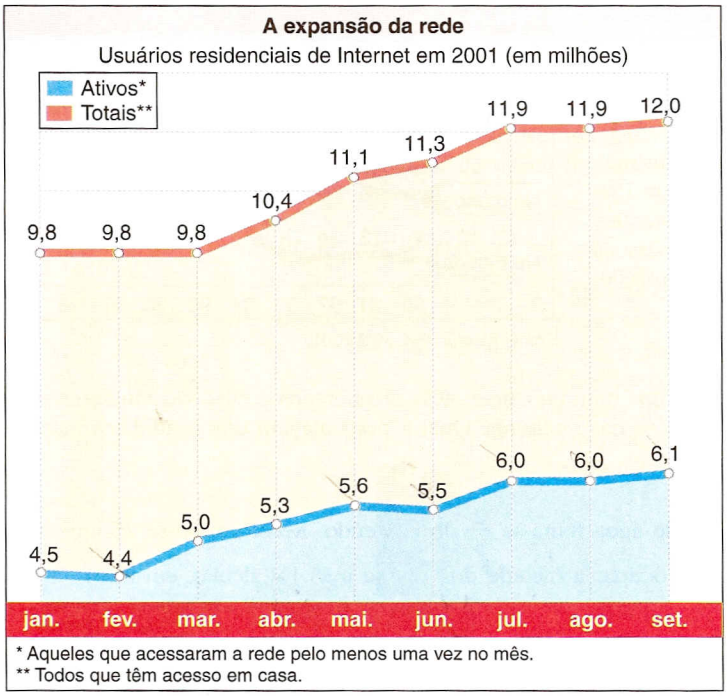
14 O teor de cloreto de sódio em uma amostra de 50 kg de água do mar é de 30%. Quantos litros de água devem ser evaporados a fim de que tal porcentagem dobre?
Dado: densidade da água = 1 kg/ℓ.

15 Começa a ser oferecida no Brasil uma nova opção de tratamento para a doença do refluxo gastroesofágico, também conhecida como azia crônica, que afeta cerca de 40% da população adulta brasileira. A técnica utiliza o endoscópio — mesmo equipamento empregado nos exames de gastrite, por exemplo — e tem um índice de sucesso de 75%.

(*Folha de S.Paulo*, 15/11/2001.)

Sendo x a população adulta brasileira e supondo que todos os adultos com refluxo utilizem a técnica citada no texto, qual é o número de adultos que obtêm sucesso no tratamento?

16



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 21/10/2001.

Analise cada uma das afirmações seguintes, assinalando *V* ou *F* e justificando as falsas:

a) O gráfico mostra que, de modo geral, aproximadamente metade dos usuários residenciais acessou a rede ao menos uma vez por mês.

b) O aumento percentual de usuários ativos foi menor que 1%, considerando os números de agosto e setembro.

c) Suponha que em setembro 30% dos usuários ativos acessaram *sites* de comércio eletrônico e, desse total, 16% das visitas resultaram em compras. Então, podemos dizer que aproximadamente 2,5% do *total de usuários residenciais* efetuaram compras eletrônicas.

d) O percentual de usuários ativos, em relação ao total, foi maior no mês de abril.

17 (Fuvest-SP) No início de sua manhã de trabalho, um feirante tinha 300 melões que ele começou a vender ao preço unitário de R$ 2,00. A partir das dez horas reduziu o preço em 20% e a partir das onze horas passou a vender cada melão por R$ 1,30. No final da manhã havia vendido todos os melões e recebido o total de R$ 461,00.

a) Qual o preço unitário do melão entre dez e onze horas?

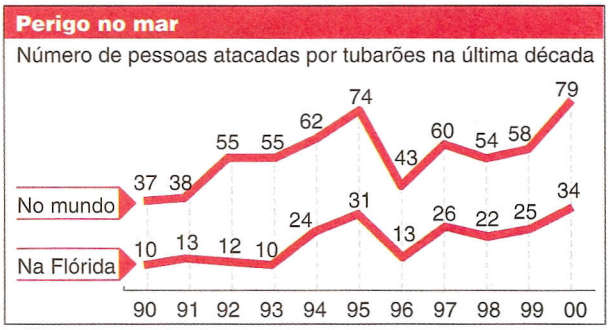
b) Sabendo que $\frac{5}{6}$ dos melões foram vendidos após as dez horas, calcule quantos foram vendidos antes das dez, entre dez e onze e após as onze horas.

18 Um avião com 120 lugares foi fretado para uma viagem do Rio de Janeiro a Fortaleza e partiu lotado. Durante o vôo, constatou-se que 60% dos passageiros estavam viajando pela primeira vez de avião e, entre eles, 87,5% não conheciam Fortaleza. Se o número de turistas que já haviam ido a Fortaleza corresponde a 25% do total, que porcentagem do total de turistas já havia viajado de avião e estado na capital cearense?

19 (Mackenzie-SP) O setor de recursos humanos de uma empresa entrevistou pessoas pretendentes a empregos, sendo $\frac{2}{3}$ a razão entre o número de aprovados e o de reprovados. Qual foi a taxa percentual de aprovação?

20 a) Considerando os dados referentes aos últimos *cinco anos*, em que ano a Flórida alcançou o maior percentual em relação ao total de ataques? Qual foi esse valor?

b) Supondo que em 2000 os ataques ocorridos no Brasil representavam 15% do total mundial e 76% desses ataques ocorreram no Recife, quantas pessoas foram atacadas por tubarões, em 2000, no Recife?



Fonte: Revista *Veja*, 29/8/2001.

21 (UF-PE) Dentre os candidatos inscritos num concurso, 40% são homens e 60% são mulheres. Destes já têm emprego 70% dos homens e 50% das mulheres. Qual a porcentagem dos candidatos inscritos que já têm emprego?

22 (UF-MS) De um recipiente cheio de água retira-se $\frac{2}{3}$ do conteúdo. Recolocando-se 25 litros de água, o conteúdo do recipiente passa a ocupar a metade do volume inicial. Calcular, em litros, 10% da capacidade do recipiente.

23 (UF-RJ) A comissão de um corretor de imóveis é igual a 5% do valor de cada venda efetuada.

a) Um apartamento foi vendido por R$ 62 400,00. Determine a comissão recebida pelo corretor.

b) Um proprietário recebe, pela venda de uma casa, R$ 79 800,00, já descontada a comissão do corretor. Determine o valor da comissão.

24 (UF-GO) O senhor José gasta hoje 25% do seu salário no pagamento da prestação de sua casa. Se a prestação for reajustada em 26%, e o salário somente em 5%, qual será a porcentagem do salário que ele deverá gastar no pagamento da prestação, após os reajustes?

25

Produtos em avaliação pelo Ipem
As mudanças por setores

Higiene e limpeza	
Papel higiênico	de 40 m para 30 m
Detergente em pó*	1 kg para 900 g
Cera em pasta	de 450 g para 400 g
Toalhas de papel	de 70 para 60 folhas
Sabonete	100 g para 90 g
Desodorante	50 ml para 44 ml

Alimentos	
Biscoitos*	de 200 g para 170 g/180 g
Pão de fôrma	de 550 g para 500 g
Caldos de galinha e carne	de 69 g para 57 g
Ovos	12 para 10 unidades
Sardinha em lata	135 g para 130 g
Requeijão	250 g para 240 g
Torrada	200 g para 160 g
Pizza	500 g para 460 g
Maionese	500 g para 450 g (nova embalagem)
Massa recheada	de 500 g para 400 g
Massa de bolo	de 300 g para 250 g

* Indústrias que prometeram voltar aos "pesos" anteriores

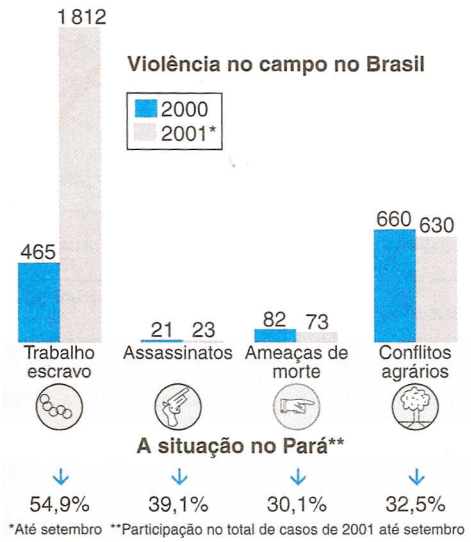
Fonte: *O Globo*, 30/8/2001.

O Ministério da Justiça decidiu, ontem, processar e multar os três maiores fabricantes de papel higiênico do país [...] em R$ 2 milhões cada um pela prática de alta maquiada de preços. O ministro José Gregori afirmou que as empresas foram punidas por abuso de poder econômico e desrespeito ao consumidor. Nos últimos meses, as indústrias passaram a fabricar rolos de papel higiênico com 30 metros, e não mais com 40 metros, sem informar os consumidores e, ainda, sem a queda equivalente de preço. As empresas que estão sendo multadas ainda correm o risco de ter seus produtos retirados das prateleiras dos supermercados.

(*O Globo*, 30/8/2001.)

a) Dos produtos de higiene e limpeza relacionados, qual apresentou a maior redução percentual de seu conteúdo? Qual apresentou a menor? Quais foram esses percentuais?
b) Qual foi a redução percentual constatada no conteúdo do pão de forma? E no dos ovos? E no da torrada?
c) Caso a redução percentual do conteúdo fosse acompanhada da redução percentual de preços, quanto deveria custar um rolo de 30 metros de papel higiênico, se o pacote com quatro unidades de 40 metros cada custava R$ 2,40?

26

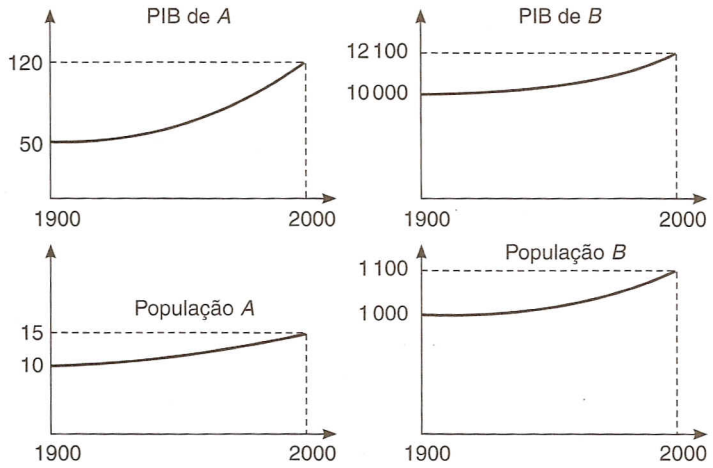


*Até setembro **Participação no total de casos de 2001 até setembro
Fonte: *Folha de S.Paulo*, 16/11/2001.

a) Quais as categorias de violência rural que apresentaram redução nas ocorrências? Qual foi, em cada caso, o percentual de redução?
b) Qual foi o aumento percentual verificado nas ocorrências de trabalho escravo?
c) Em relação ao total de ocorrências em 2001, que porcentagem refere-se ao Pará?

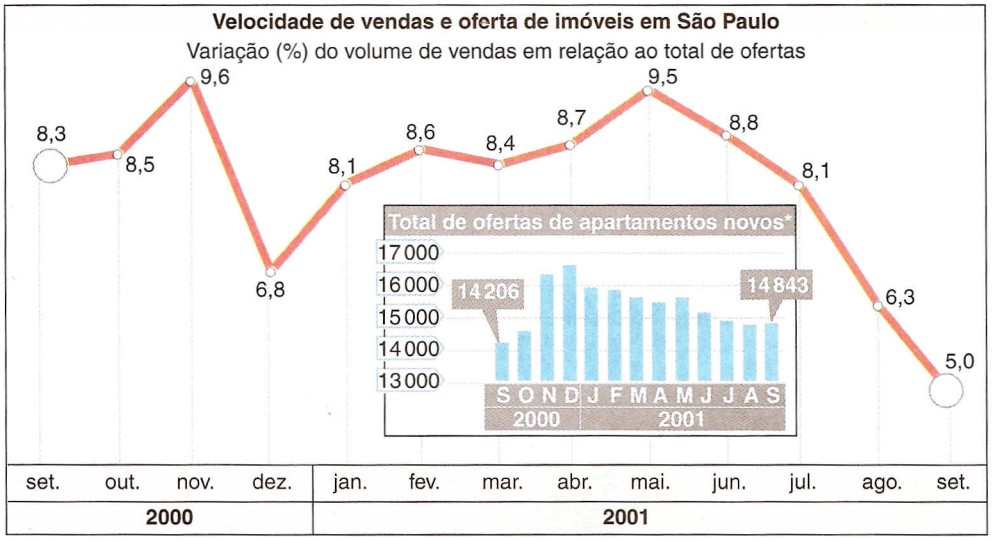
27 (UFF-RJ) A Loja Goiás paga, pela aquisição de certo produto, o correspondente ao preço x (em reais) de fabricação, mais 5% de impostos e 3% de frete, ambos calculados sobre o preço x. Vende esse produto ao consumidor por R$ 54,00, com lucro de 25% (em relação ao custo). Determine o valor de x.

28 (UF-RJ) Os gráficos abaixo correspondem às evoluções do Produto Interno Bruto (PIB), em bilhões de reais, e da população, em milhões de habitantes, de dois países hipotéticos, A e B, entre 1900 e 2000.



a) Qual dos dois países teve maior aumento percentual do PIB no período? Justifique.
b) Determine a variação do PIB *per capita* (razão entre o PIB e o número de habitantes de cada um dos países) no período.

29



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 4/11/2001. *Em unidades.

a) Entre que meses consecutivos de 2001 ocorreu a maior queda no volume de vendas? Qual foi a redução percentual registrada?

b) Qual o aumento percentual aproximado no volume de vendas de dezembro de 2000 a janeiro de 2001?

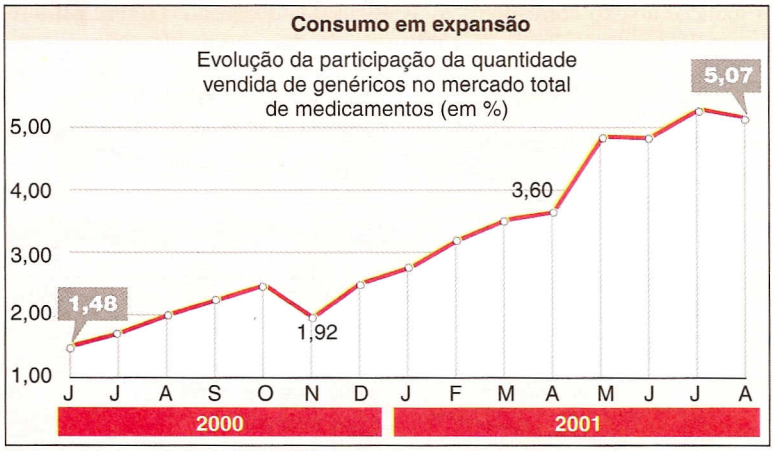
c) Quantos apartamentos novos foram vendidos em setembro de 2001?

30 (UF-RN) Dois supermercados (X e Y) vendem leite em pó, de uma mesma marca, ao preço de R$ 4,00 a lata. Numa promoção, o supermercado X oferece 4 latas pelo preço de 3 (para vendas acima de 3 latas), e o supermercado Y dá um desconto de 20% em cada lata adquirida.
Responda, justificando, em qual dessas promoções você economizaria mais, se comprasse

a) 12 latas;

b) 11 latas.

31



Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 16/12/2001.

De acordo com dados da Anvisa, a quantidade de genéricos vendida no Brasil saltou x%, de junho de 2000 a agosto de 2001, chegando a 7,06 milhões de unidades, ou 5,07% do mercado total.

(*O Estado de S. Paulo*, 16/12/2001.)

a) Determine x.

b) Quantas unidades de remédios foram vendidas no Brasil em agosto de 2001?

32 (UF-BA) O proprietário de um depósito que continha 1 000 litros de gasolina resolveu misturá-la com álcool e usou a seguinte estratégia: 100 litros de gasolina foram retirados do depósito e substituídos por 100 litros de álcool; em seguida, 100 litros dessa mistura foram retirados e substituídos por 100 litros de álcool. Após esse procedimento, o percentual de gasolina contido na mistura é de x%. Calcule x.

33 (UF-GO) Analise o seguinte texto e responda às perguntas abaixo:

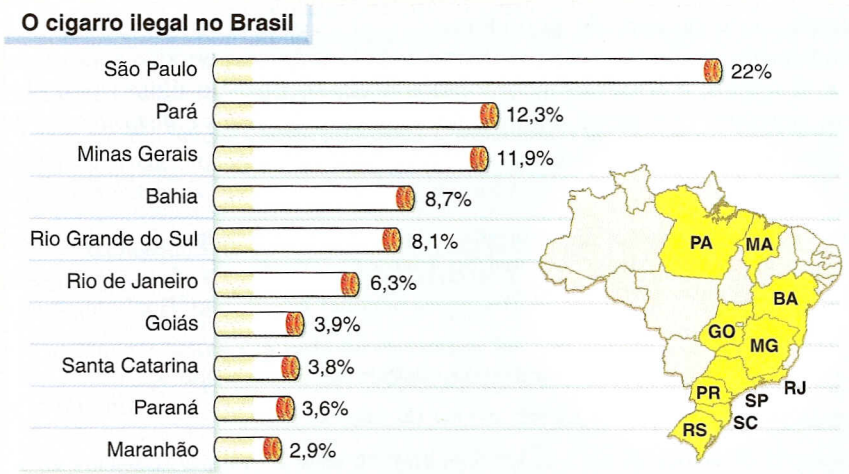
> Pela primeira vez, o número de mulheres conectadas [à Internet] ultrapassou o de homens nos Estados Unidos. Elas representam [em maio de 2000] 50,4% dos internautas. [...] De maio de 1999 a maio de 2000, a presença delas aumentou 34,9%, enquanto o número [total] de usuários da Internet cresceu 22,4%.
>
> (*Veja*, 23/8/2000. p. 84.)

a) Qual era o percentual de mulheres entre os usuários da Internet em maio de 1999?

b) No período considerado, de maio de 1999 a maio de 2000, qual foi o percentual de crescimento do número de usuários masculinos na Internet?

34

A indústria informal de cigarros



Fonte: *O Globo*, 25/2/2001.

Na cesta do cigarro ilegal, a indústria formal põe o contrabando (produtos transferidos clandestinamente de um país para o outro), a falsificação (produtos que copiam ou imitam marcas famosas e que, além de contrabandeados, são distribuídos nos países que os fabricam) e, ainda, a evasão fiscal (produtos com aparência formal mas que não recolhem impostos).

No mundo — que produz 5,6 trilhões de cigarros ao ano — o tamanho dessa cesta é de 350 bilhões de cigarros. Trata-se de uma montanha fumegante que equivale a 35% das exportações mundiais — as quais alcançam um trilhão de cigarros anuais — e corresponde a uma evasão fiscal de U$ 16 bilhões.

No Brasil, o cigarro ilegal responde por 32% do consumo total, que foi de 139,9 bilhões em 2000, numa evasão de impostos calculada em R$ 1,2 bilhão.

(*O Globo*, 25/2/2001.)

De acordo com o texto, responda:

a) Quantos cigarros ilegais foram consumidos no Brasil no ano de 2000?

b) Quais foram as quantidades de cigarro ilegal consumido, em 2000, nos Estados de São Paulo, Rio de Janeiro e Pará, respectivamente?

c) Que porcentagem do consumo mundial de cigarros cabe ao Brasil? E no cenário de cigarro ilegal?

d) De quanto é, em reais, a evasão de impostos ocasionada pelo consumo de cigarro ilegal na Região Sul? (Suponha evasão distribuída como no gráfico acima.)

3 ○ Juros

Suponhamos que uma pessoa deseje comprar uma geladeira e não disponha de dinheiro suficiente para pagamento à vista. Nessas condições, ela pode efetuar a compra a prazo ou tentar um empréstimo em um banco. Em qualquer um desses casos, a pessoa geralmente paga uma quantia — além do preço da geladeira — a título de *juros*. O valor desses juros é justificado pelo prazo obtido para o pagamento ou pelo "aluguel" do dinheiro emprestado.

Há outras situações em que aparecem juros. Por exemplo: se uma pessoa dispõe de uma importância em dinheiro, ela pode aplicá-la em uma caderneta de poupança ou em algum outro investimento. Ao fim de certo período, ela receberá do banco a importância aplicada *acrescida* de um valor referente aos juros da aplicação. A essa quantia total recebida do banco damos o nome de *montante*.

Normalmente, quando se realiza alguma operação desse tipo, fica estabelecida uma *taxa de juros* por um período (mês, dia, ano), a qual incide sobre o valor da transação, chamado de *capital*.

4 ○ Juros simples

Suponhamos que sobre uma quantia devam ser calculados *juros simples*, a uma taxa fixa por período, durante certo número de períodos.

Isso significa que os juros correspondentes a cada um dos períodos serão *sempre calculados sobre a quantia inicial*, e só serão incorporados a ela ao final do último período.

Dizemos, portanto, que nesse regime há pagamento de *juros constantes por períodos iguais*.

Exemplo 8

Renato contraiu de um amigo um empréstimo de R$ 800,00 em regime de juros simples, à taxa de 2% ao mês, comprometendo-se a pagá-lo ao final de 4 meses.

Vamos calcular os juros a serem pagos:

- Em um mês, os juros são de

$$2\% \text{ de } 800{,}00 = 0{,}02 \cdot 800 = 16{,}00$$

- Como o prazo combinado é de 4 meses, o total de juros é:

$$J = 4 \times 16{,}00 = 64{,}00$$

Assim, ao todo, Renato pagará ao amigo:

$$\underbrace{800}_{\text{capital}} + \underbrace{64}_{\text{juros}} = \underbrace{864{,}00}_{\text{montante}}$$

De modo geral, um capital C, empregado durante n períodos, à taxa i, produz juros J dados por:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

e montante M igual a:

$$M = C + J = C + Cin \Rightarrow \quad M = C\,(1 + in)$$

Observação

A taxa deve ser sempre compatível com a unidade de tempo considerada. Por exemplo, se a taxa for de 4% a.m., para um prazo de 60 dias adotaremos n = 2 (2 meses).

Exercícios

35 Calcule o montante de uma aplicação financeira a juros simples nas seguintes situações:

	Capital	Taxa	Tempo de rendimento
a)	R$ 10 000,00	3% ao mês	6 meses
b)	R$ 500,00	18% ao ano	4 meses
c)	R$ 4 000,00	2% ao mês	1,5 ano

36 Uma dívida de R$ 2 000,00 foi contraída a juros simples, por 4 meses, à taxa de 5% a.m. Qual será o montante da dívida após esse prazo?

37 Um capital aplicado a juros simples, durante 5 meses, à taxa de 1% a.m., gerou nesse período um montante de R$ 1 260,00. Qual foi o capital aplicado?

38 Um capital é aplicado, a juros simples, à taxa de 12% a.m. Quanto tempo, no mínimo, ele deve ficar aplicado, a fim de que seja possível resgatar o quádruplo da quantia aplicada?

39 (FGV-SP) Um investidor norte-americano traz para o Brasil 50 000 dólares, faz a conversão dos dólares para reais; aplica os reais por um ano à taxa de 18% ao ano e no resgate converte os reais recebidos para dólares e os envia para os Estados Unidos. No dia da aplicação um dólar valia R$ 1,10 e, um ano depois, na data do resgate um dólar valia R$ 1,20.

a) Qual a taxa de rendimento dessa aplicação, considerando os valores expressos em dólares?
b) Quanto deveria valer um dólar na data de resgate (um ano após a aplicação) para que a taxa de rendimento em dólares tivesse sido de 12% ao ano?

40 (FGV-SP) O sr. Mathias tem R$ 12 000,00 para investir pelo prazo de um ano. Ele pretende aplicar parte numa aplicação *A* que tem um rendimento esperado de 15% ao ano sobre o valor investido, e o restante numa outra aplicação *B*, que dá um rendimento de 20% sobre o valor investido.

a) Qual o rendimento anual esperado se ele aplicar R$ 7 000,00 em *A* e R$ 5 000,00 em *B*?
b) Qual o máximo que deve investir em *A* para auferir um ganho esperado de no mínimo R$ 2 200,00 daqui a um ano?

41 (U. F. Juiz de Fora-MG) O preço à vista de uma mercadoria é de R$ 130,00. O comprador pode pagar 20% de entrada no ato da compra e o restante em uma única parcela de R$ 128,96, vencível em 3 meses. Admitindo-se o regime de juros simples comerciais, qual é a taxa de juros anual cobrada na venda a prazo?

42 (FGV-SP) Carlos adquiriu um aparelho de TV em cores pagando uma entrada de R$ 200,00 mais uma parcela de R$ 450,00 dois meses após a compra. Sabendo-se que o preço à vista do aparelho é R$ 600,00:

a) Qual a taxa mensal de juros simples do financiamento?
b) Após quantos meses da compra deveria vencer a parcela de R$ 450,00 para que a taxa de juros simples do financiamento fosse de 2,5% ao mês?

5 Juros compostos

O regime de capitalização mais utilizado nas transações comerciais e aplicações financeiras é o de *juros compostos*, que se baseia no seguinte princípio:

- Ao final do 1º período, os juros incidentes sobre o capital inicial são a ele incorporados, produzindo o 1º montante.
- Ao final do 2º período, os juros incidem sobre o 1º montante e incorporam-se a ele, gerando o 2º montante.
- Ao final do 3º período, os juros, calculados sobre o 2º montante, incorporam-se a ele, gerando o 3º montante; e assim por diante.

De modo geral, um capital C, a juros compostos, aplicado a uma taxa fixa i, durante n períodos, produz:

- ao final do 1º período: $M_1 = C + Ci \Rightarrow M_1 = C(1 + i)$
- ao final do 2º período: $M_2 = M_1 + M_1 i = M_1(1 + i) \Rightarrow M_2 = C(1 + i)^2$
- ao final do 3º período: $M_3 = M_2 + M_2 i = M_2(1 + i) \Rightarrow M_3 = C(1 + i)^3$

⋮

- ao final do n-ésimo período: $M_n = C(1 + i)^n$

Devido à sua natureza, o sistema de juros compostos é chamado *capitalização acumulada*.

Exemplo 9

Lígia aplicou a quantia de R$ 700,00 em um fundo de investimento que rende 2% ao mês, em regime de juros compostos. Vamos aplicar a fórmula deduzida para saber seu saldo mês a mês.

Tempo decorrido	1 mês	2 meses	3 meses	4 meses	...	8 meses
Saldo de sua aplicação	$700 \cdot (1 + 0{,}02)^1$ ↓ 714	$700 \cdot (1{,}02)^2$ ↓ 728,28	$700 \cdot (1{,}02)^3$ ↓ 742,84	$700 \cdot (1{,}02)^4$ ↓ 757,70	...	$700 \cdot (1{,}02)^8$ ↓ 820,16

Observe que os montantes acima representam os termos de uma progressão geométrica de razão igual a 1,02.

Exemplo 10

A população de certo município cresce à taxa de 12% ao ano. Se atualmente essa população é estimada em 20 mil habitantes, qual será o número de habitantes daqui a cinco anos?

Podemos adaptar a expressão do montante dos juros compostos a essa situação, pois o acréscimo populacional em um determinado ano é incorporado à população do ano anterior, e assim sucessivamente.

Segue, portanto, a expressão: $p(t) = p_0 \cdot (1 + i)^t$, sendo p_0 a população atual, $p(t)$ a população daqui a t anos e i a taxa de crescimento anual.

Assim:

$$p(5) = 20\,000 \cdot (1{,}12)^5 = 35\,247 \text{ habitantes}$$

Mantido tal crescimento, em quanto tempo o município terá 120 mil habitantes?

Devemos determinar t tal que $p(t) = 120\,000$. Temos:

$$120\,000 = 20\,000 \cdot 1{,}12^t \Rightarrow 1{,}12^t = 6$$

A determinação de t é feita aplicando logaritmos (em base e, por exemplo):

$$t \cdot \ell n\ 1{,}12 = \ell n\ 6 \Rightarrow t = \frac{\ell n\ 6}{\ell n\ 1{,}12} \cong 15{,}8 \text{ anos}$$

Exemplo 11

Um produto sofreu reajustes sucessivos de 15% e de 20%. Vamos determinar seu preço após esses aumentos, se antes deles seu preço era x reais.

Aqui não podemos usar a fórmula aprendida, pois as taxas de aumento *não* são iguais. Entretanto, o princípio de capitalização (ou reajuste) acumulada é mantido. Temos:

- Após o 1º aumento, esse produto custará $x + 0{,}15x = 1{,}15 \cdot x$.
- O 2º aumento incidirá sobre esse valor, isto é:

$$\underbrace{1{,}15x}_{\substack{\text{preço após o} \\ \text{1º aumento}}} + \underbrace{0{,}2 \cdot 1{,}15 \cdot x}_{\substack{\text{20\% de} \\ \text{aumento}}} = 1{,}15 \cdot x(1 + 0{,}2) = 1{,}15 \cdot 1{,}2 \cdot x = 1{,}38 \cdot x$$

Note que, em relação a seu preço original, o aumento total foi de 38%.

Exercícios

43 Um capital de R$ 120,00 é aplicado em uma caderneta de poupança por 1 ano e meio, à taxa de 1% a.m. Qual é o montante dessa aplicação?

44 Um capital, empregado a juros compostos e à taxa de 8% ao mês, produziu em 9 meses um montante de R$ 9995,00. Qual foi o capital aplicado?

45 (PUC-RJ) Uma carteira de investimento rende 2% ao mês. Depois de três meses, R$ 1500,00 aplicados cumulativamente nessa carteira valem aproximadamente x reais. Determine o valor de x.

46 Uma aplicação financeira regida a juros compostos e a uma taxa fixa gera um aumento de 44% do capital investido em 2 meses. Qual é a taxa mensal de juros dessa aplicação?

47 Um pequeno poupador abriu uma caderneta de poupança com R$ 100,00. Supondo rendimento constante de 2% a.m., determine:

a) o montante após um ano de aplicação;
b) o tempo necessário para que o poupador possa resgatar a quantia de R$ 200,00.

48 (UF-PI) Um capital é empregado a uma taxa anual de 5% ao ano (juros compostos), calculada anualmente. Se o valor do montante depois de n anos é aproximadamente 34% maior que o capital inicial, qual é o valor de n?
(Use $\log_{10} 1{,}05 = 0{,}02$ e $\log_{10} 1{,}34 = 0{,}12$.)

49 (UF-PA) Suely recebeu R$ 1000,00 e pretende investi-los pelo prazo de dois anos. Um amigo lhe sugere duas opções de investimento. Na primeira delas a rentabilidade é de 20% ao ano e, no momento do resgate, há um desconto de 25% sobre o valor acumulado, referente ao imposto de renda. Na segunda, a rentabilidade é de 6% ao ano, sem incidência de imposto. Efetuando os cálculos necessários, determine qual a aplicação que renderá mais a Suely, após dois anos.

50 As taxas mensais de rendimento em uma aplicação, durante os três primeiros meses do ano, foram, respectivamente, iguais a 3%, 5% e 6%.

a) Qual o montante gerado no trimestre pela aplicação de R$ 1000,00 no início do ano?
b) Qual o rendimento dessa aplicação acumulado no trimestre?

51 (FGV-SP) Um produto cujo preço era R$ 220,00 teve dois aumentos sucessivos, de 15% e 20% respectivamente. Em seguida, o valor resultante teve um desconto percentual igual a x, resultando num preço final y.

a) Calcule y se x = 10%.
b) Calcule x se y = R$ 290,00.

52 Em certa região da Amazônia, verificou-se que a área atingida por desmatamento aumentava mensalmente segundo uma P.G. de razão 1,05.

a) Se atualmente essa área desmatada é igual a A_0 km^2, qual será a área desmatada daqui a 3 meses?
b) Se as autoridades só conseguirem deter o desmatamento após 6 meses, qual será o acréscimo percentual da área desmatada, em relação à sua dotação inicial?

53 (UF-PE) Em um país irreal, o governante costuma fazer empréstimos para viabilizar sua administração. Existem dois empréstimos possíveis: pode-se tomar emprestado de países ricos com juros de 4,2% ao ano (aqui incluída a taxa de risco) ou toma-se emprestado dos banqueiros do país irreal que cobram juros compostos de 3% ao mês. Pressões políticas da oposição obrigam o governante a contrair empréstimo com os banqueiros do seu país. Quantas vezes maiores que os juros anuais cobrados pelos países ricos são os juros anuais cobrados pelos banqueiros do país irreal? Dado: use a aproximação $1{,}03^{12} \cong 1{,}42$.

54 Em um rio, a população de peixes da espécie A cresce à taxa de 5% ao mês e a espécie B cresce à taxa de 8% ao mês. Recentes estudos estimaram em 50 000 e 30 000 as quantidades de peixes das espécies A e B, respectivamente.

a) Qual é a razão entre o número de peixes da espécie A e o da espécie B, atualmente?
b) Qual será essa razão daqui a 5 meses?
c) Em quantos anos, aproximadamente, a proporção será de 1:1?

55 (UFF-RJ) O tratamento com um novo xampu recomenda sua aplicação por duas vezes: em cada aplicação devem ser utilizados, exatamente, 5% do volume existente no frasco.
Determine a porcentagem do volume inicial que restará no frasco após a segunda aplicação.

56 (FGV-SP) Um terreno vale hoje A reais, e esse valor fica 20% maior a cada ano que passa (em relação ao valor de um ano atrás).

a) Qual o seu valor daqui a n anos? Qual a valorização sofrida ao longo do enésimo ano, expressa em reais?
b) Daqui a quantos anos aproximadamente o valor do terreno triplicará?

57 (UFF-RJ) Em 15 de julho Miguel deverá pagar a taxa de condomínio acrescida, a partir desse mês, de uma cota extra. Após o primeiro pagamento essa cota sofrerá, mensalmente, uma redução de 60%. Determine o mês em que, na taxa de condomínio a ser paga por Miguel, a cota extra original estará reduzida de 93,6%.

58 Consultado sobre o futuro das ações de uma empresa, um economista arriscou o palpite de que, durante os próximos 10 anos, o valor de uma ação da empresa, em cada ano, sofrerá uma desvalorização de 5% em relação ao seu valor do ano anterior.
Admita que o valor atual de uma ação seja V_0.

a) Encontre a fórmula que prevê o valor V dessa ação daqui a t anos ($t \leq 10$).
b) É possível que nesse período o valor da ação caia para a metade de seu valor atual?

59 Precisando de R$ 2 000,00, Otília procurou dois amigos, X e Y. O amigo X emprestaria esse valor a juros compostos de 5% a.m. por 4 meses. O amigo Y se propôs a emprestar essa quantia a juros simples de 5,39% a.m. por 4 meses. Qual amigo de Otília oferece melhores condições?

60 (UF-MG) Um televisor estava anunciado por R$ 500,00 para pagamento à vista ou em três prestações mensais de R$ 185,00 cada; a primeira delas a ser paga um mês após a compra. Paulo, em vez de pagar à vista, resolveu depositar, no dia da compra, os R$ 500,00 numa caderneta de poupança, que lhe renderia 2% ao mês nos próximos três meses. Desse modo, ele esperava liquidar a dívida, fazendo retiradas de R$ 185,00 daquela caderneta nas datas de vencimento de cada prestação. Mostre que a opção de Paulo não foi boa, calculando quanto a mais ele teve de desembolsar para pagar a última prestação.

Testes de vestibulares

1 (UF-SE) A prefeitura de certa cidade realizou dois concursos para preenchimento de suas vagas. No primeiro, a razão entre o número de vagas e o número de candidatos era de 2 para 5. Apesar do número de vagas ter ficado constante, no segundo concurso, aquela razão passou a ser de 1 para 4. É correto afirmar que o número de inscritos aumentou em:

a) 15%
b) 25%
c) 40%
d) 50%
e) 60%

2 (PUC-RJ) Um turista, ao viajar, comprou US$ 1 000,00 de reserva a uma taxa de 1,80 reais por dólar. Não havendo usado este dinheiro na viagem, ele o vendeu na sua volta a uma taxa de 1,90 reais por dólar. Então, o turista:

a) lucrou R$ 100,00.
b) lucrou R$ 180,00.
c) lucrou R$ 190,00.
d) perdeu R$ 180,00.
e) perdeu R$ 100,00.

3 (Enem-MEC) Um engenheiro, para calcular a área de uma cidade, copiou sua planta numa folha de papel de boa qualidade, recortou e pesou numa balança de precisão, obtendo 40 g. Em seguida, recortou, do mesmo desenho, uma praça de dimensões reais 100 m × 100 m, pesou o recorte na mesma balança e obteve 0,08 g. Com esses dados foi possível dizer que a área da cidade, em metros quadrados, é de, aproximadamente:

a) 800
b) 10 000
c) 320 000
d) 400 000
e) 5 000 000

4 (Vunesp-SP) Os dados publicados na revista *Veja* de 12/4/2000 mostram que, de cada 100 pessoas com o ensino médio, apenas 54 conseguem emprego. Se num determinado grupo de 3 000 pessoas, 25% têm ensino médio, o número provável de pessoas do grupo, com ensino médio, que, de acordo com os dados da pesquisa, irão conseguir emprego, é:

a) 375 c) 450 e) 1 620
b) 405 d) 750

5 (UF-PE) Quando o preço da unidade de determinado produto diminuiu 10%, o consumo aumentou 20% durante certo período. No mesmo período, de que percentual aumentou o faturamento da venda deste produto?

a) 8% c) 12% e) 30%
b) 10% d) 15%

6 (Mackenzie-SP) Ao comprar um objeto, para pagamento em parcelas iguais, uma pessoa foi informada de que a parcela paga até a data do vencimento teria um desconto de 20% e aquela paga com atraso teria um acréscimo de 20%. Se a primeira parcela foi paga no vencimento e a segunda com atraso, o segundo pagamento teve, em relação ao primeiro, um acréscimo de:

a) 40% c) 50% e) 25%
b) 48% d) 20%

7 (UF-MG) Certa região do país, cuja área é de 300 000 km², possui 80% de terras cultiváveis, 25% das quais são improdutivas. Essas terras improdutivas deverão ser usadas no assentamento de famílias de agricultores sem terra. Supondo que cada família receba 30 hectares (1 ha = 10 000 m²) e que o custo do assentamento de cada uma delas seja de R$ 30 000,00, o custo total do assentamento naquela região, em bilhões de reais, será de:

a) 2,4 c) 6,0 e) 3,0
b) 0,8 d) 4,8

8 (UFF-RJ) A empresa Acme concedeu a seus funcionários mensalmente, durante dois meses, um reajuste fixo de x% ao mês. Se ao final desses dois meses o reajuste acumulado foi de 21%, o valor de x é:

a) 10 c) 11 e) 21
b) 10,5 d) 11,5

9 (ESPM-SP) Numa loja um objeto custa R$ 100,00 à vista. Uma pessoa compra esse objeto em duas parcelas iguais de R$ 60,00, pagando a primeira parcela no ato da compra e a segunda parcela trinta dias depois. Os juros cobrados por essa loja foram a uma taxa mensal de:

a) 50% c) 30% e) 10%
b) 40% d) 20%

10 (Covest-PE) Uma pessoa, em repouso, respira 17 vezes por minuto e, a cada vez, inala 0,6 litro de ar. Do ar respirado, $\frac{1}{5}$ é de oxigênio, que será absorvido pelo organismo. Do total de oxigênio absorvido somente $\frac{1}{5}$ chega à corrente sangüínea. Quantos litros de oxigênio entram na corrente sangüínea em 1 (uma) hora?

a) 24,28 c) 24,08 e) 24,38
b) 24,18 d) 24,48

11 (Unaerp-SP) "O Poliduto Paulínia–Brasília, com base em Ribeirão Preto, tem capacidade para transportar 20 mil m³/dia de óleo diesel, gasolina, querosene de aviação e GLP. Atualmente o Poliduto opera com 30% de sua capacidade, sendo o maior volume de diesel, com 65% do total bombeado."

Com base nos dados do texto acima, pode-se concluir que o volume diário, em litros, de óleo diesel bombeado pelo Poliduto Paulínia–Brasília é de:

a) 13 000 000 d) 3 900
b) 3 900 000 e) 1 300
c) 1 300 000

12 (UF-PE) Suponha que 8% da população adulta do Brasil esteja desempregada e que a jornada média de trabalho semanal seja de 44 horas. Qual deveria ser a jornada média de trabalho semanal para que todos os adultos estivessem empregados?

a) 40h01min48s d) 40h16min48s
b) 40h06min48s e) 40h28min48s
c) 40h10min48s

13 (Fund. Visconde de Cairu-BA) Uma loja vende um televisor por R$ 780,00 à vista. A prazo, o aparelho é vendido por R$ 838,50, sendo dada uma entrada de 20% do valor à vista e o restante pago após 45 dias.
A taxa anual de juros simples aplicada sobre o saldo devedor é igual a:

a) 75% c) 30% e) 9%
b) 60% d) 20%

14 (Famec-PR) Para atrair clientes, uma loja de eletrodomésticos publicou o seguinte anúncio:

> Aproveite a promoção!
> Fogões e geladeiras em 5 vezes sem juros e sem entrada, ou à vista, com 20% de desconto.

Sabemos que, na verdade, oferecer descontos para pagamentos à vista é uma forma de "disfarçar" a cobrança de juros nas vendas a prazo. Portanto, no caso dessa loja, os juros cobrados em relação ao preço à vista, quando o consumidor opta por pagar a prazo, são de:

a) 20,0% c) 25,0% e) 30,0%
b) 22,5% d) 27,5%

15 (Unopar-PR) Uma loja de eletrodomésticos faz o seguinte anúncio: "Compre uma TV por R$ 1200,00 e só pague daqui a 30 dias, ou então, pague hoje com um desconto de 20%". Se uma pessoa comprar essa TV e decidir pagar apenas daqui a 30 dias, a taxa de juros a ser paga é:

a) 20% ao mês. d) 35% ao mês.
b) 25% ao mês. e) 40% ao mês.
c) 30% ao mês.

16 (UF-RS) Uma loja instrui seus vendedores para calcular o preço de uma mercadoria, nas compras com cartão de crédito, dividindo o preço à vista por 0,80. Dessa forma, pode-se concluir que o valor da compra com cartão de crédito, em relação ao preço à vista, apresenta:

a) um desconto de 20%.
b) um aumento de 20%.
c) um desconto de 25%.
d) um aumento de 25%.
e) um aumento de 80%.

17 (UF-CE) José e João possuem uma empresa cujo capital é de R$ 150 000,00. José tem 40% de participação na sociedade e deseja aumentar a sua participação para 55%. Se João não deseja alterar o valor, em reais, de sua participação, o valor que José deve empregar na empresa é:

a) R$ 110 000,00 d) R$ 90 000,00
b) R$ 170 000,00 e) R$ 50 000,00
c) R$ 82 500,00

18 (Unaerp-SP) No último vestibular, uma universidade ofereceu 150 vagas para o curso de engenharia. A relação candidato/vaga era 3,5 e a razão entre o número de homens e o de mulheres que se candidataram a uma vaga nesse curso era igual a $\frac{3}{2}$. Se 40% das candidatas foram aprovadas, o número de candidatos aprovados, considerando-se que todas as vagas foram preenchidas, correspondeu a:

a) 105 c) 90 e) 66
b) 99 d) 84

19 (Covest-PE) As bebidas *L*, *V* e *R* possuem teores alcoólicos de 24%, 44% e 36%, respectivamente. Qual o teor alcoólico de um coquetel consistindo de 50 ml de *L*, 25 ml de *V*, 25 ml de *R* e 100 ml de água?

a) 15% c) 16% e) 19%
b) 20% d) 17%

20 (U. F. Juiz de Fora-MG) Uma loja vende seus produtos nas seguintes condições: no cartão de crédito, com 5% de acréscimo sobre o preço de tabela, ou à vista, com 20% de desconto sobre o preço de venda no cartão de crédito. A compra à vista de um produto dessa loja terá um desconto sobre o preço de tabela de:

a) 15% b) 16% c) 17% d) 18%

21 (PUC-RS) Se o valor de um automóvel novo é P_0 e sofre uma desvalorização de 12% ao ano, o preço do veículo após x anos de uso é:

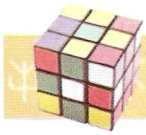
a) $P = P_0 + 12x$ d) $P = P_0 + (0{,}88)^x$
b) $P = P_0 + (1{,}2)^x$ e) $P = P_0\ (0{,}88)^x$
c) $P = P_0\ (0{,}12)^x$

22 (PUC-SP) Um equipamento de som está sendo vendido em uma loja por R$ 1 020,00 para pagamento à vista. Um comprador pode pedir um financiamento pelo plano 1 + 1 pagamentos iguais, isto é, o primeiro pagamento deve ser feito no ato da compra e o segundo, 1 mês após aquela data. Se a taxa de juro praticada pela empresa que irá financiar a compra for de 4% ao mês, então o valor de cada uma das prestações será de:

a) R$ 535,50 d) R$ 592,12
b) R$ 522,75 e) R$ 515,00
c) R$ 520,00

23 (Fuvest-SP) Numa barraca de feira, uma pessoa comprou maçãs, bananas, laranjas e pêras. Pelo preço normal da barraca, o valor pago pelas maçãs, bananas, laranjas e pêras corresponderia a 25%, 10%, 15% e 50% do preço total, respectivamente. Em virtude de uma promoção, essa pessoa ganhou um desconto de 10% no preço das maçãs e de 20% no preço das pêras. O desconto assim obtido no valor total de sua compra foi de:

a) 7,5% b) 10% c) 12,5% d) 15% e) 17,5%



Desafios

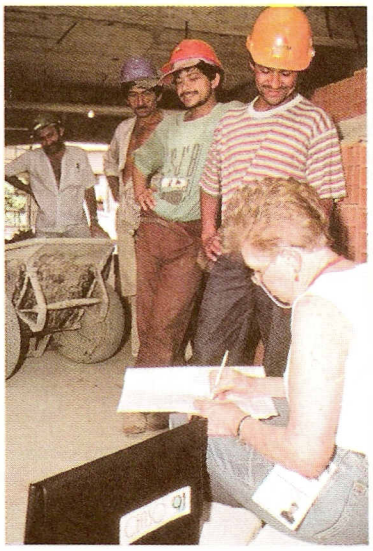
1

Censo revela novo perfil da população do país

O Brasil atingiu a marca de 169 544 443 habitantes. Os dados preliminares do Censo 2000 revelam que houve aumento de 22 718 968 no número da população em 9 anos. Mesmo assim a taxa de crescimento da população na última década ficou em 1,6% ao ano. Nos anos 80, essa taxa foi de 1,9%.

O crescimento da população brasileira na década de 90 aponta para a consolidação de novo modelo de expansão do país, com a presença crescente de pólos regionais de desenvolvimento. É o que mostram os dados preliminares do Censo 2000, divulgados ontem pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O levantamento revela ainda a crescente urbanização e o ritmo cada vez menor de aumento populacional no país.

Esse desenho demográfico vai determinar alterações nas políticas públicas e nas decisões de investimentos privados. "Quanto mais soubermos sobre a realidade do nosso país, melhores condições teremos para focalizar e adequar os gastos públicos", explicou o ministro do Planejamento, Martus Tavares.



Delfim Martins/Pulsar

Os mais populosos

Municípios	População
São Paulo (SP)	10 406 166
Rio de Janeiro (RJ)	5 850 544
Salvador (BA)	2 440 886
Belo Horizonte (MG)	2 229 697
Fortaleza (CE)	2 138 234
Brasília (DF)	2 043 169
Curitiba (PR)	1 586 898
Recife (PE)	1 421 947
Manaus (AM)	1 403 796
Porto Alegre (RS)	1 359 932
Belém (PA)	1 279 861
Goiânia (GO)	1 090 581
Guarulhos (SP)	1 071 299
Campinas (SP)	967 921
Nova Iguaçu (RJ)	915 364

Fonte: *O Estado de S. Paulo*, 22/12/2000.

Apesar de os dados mostrarem alguma desconcentração do crescimento populacional, isto não quer dizer que as grandes cidades não estejam inchadas ou que a migração entre Estados tenha sido estancada.

O perfil traçado pelos resultados preliminares do Censo mostra que metrópoles como São Paulo e Rio, que tradicionalmente atraíam levas de habitantes de outras regiões, apresentaram as menores taxas de crescimento entre as capitais nos anos 90: 0,85% e 0,73% ao ano, respectivamente. O ritmo de expansão das duas maiores cidades brasileiras ficou abaixo da média estadual, o que mostra que as cidades do interior desses Estados é que foram responsáveis pelo aumento da população.

Diferentemente disso, em 16 Estados — a maioria no Norte e Nordeste —, as capitais tiveram aumento populacional acima das médias estaduais. "Isso mostra que de alguma maneira o crescimento está sendo mais descentralizado", disse Alícia Bercovich.

(Leandra Peres e Demétrio Weber. *O Estado de S. Paulo*, 22/12/2000.)

1ª parte

Suponha que a taxa de crescimento populacional no país permaneça, até 2010, em 1,6% ao ano.

a) Aproximando para 170 milhões a população em 2000, qual é a lei que define a população p do Brasil daqui a t anos ($t \leq 10$), contados a partir de 2000?
b) Qual será a população do Brasil em 2005?
c) Estime o tempo necessário para que a população brasileira ultrapasse 190 milhões.

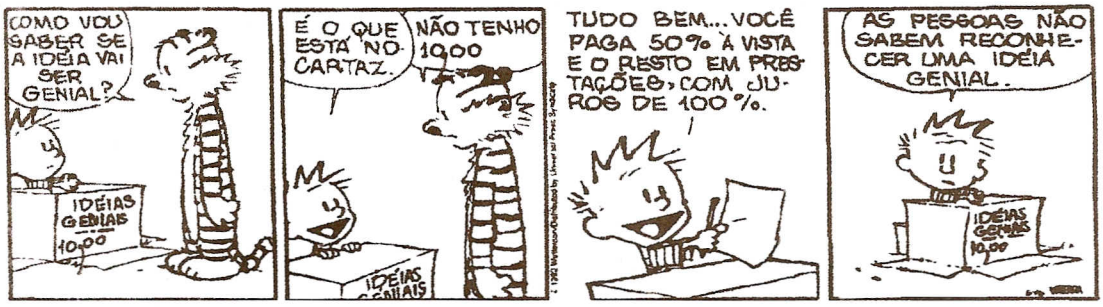
2ª parte

Suponha que a cidade de São Paulo mantenha até 2005 a taxa de crescimento populacional e, a partir de 2006, essa taxa se reduza a 0,75% ao ano, até 2010.
Qual será a população de São Paulo em 2010?

3ª parte

Supondo que Salvador cresça à taxa de 2% ao ano e que o Rio de Janeiro mantenha seu crescimento populacional, em quantos anos, contados a partir de 2000, a população de Salvador ultrapassará a do Rio de Janeiro?

2 O MELHOR DE CALVIN/*Bill Watterson*



(*O Estado de S. Paulo*, 30/1/2001.)

Suponha que um amigo de Calvin tenha aceitado sua proposta "genial": pagou 5,00 à vista e os outros 5,00 decidiu pagar em três parcelas iguais (30, 60 e 90 dias) com juros (compostos) de 100% ao mês. Qual foi o valor de cada parcela?

3 (UF-MG) Um fabricante gastava R$ 40,00 na produção de cada unidade de uma mercadoria, que ele vendia por R$ 100,00. Sobre o preço de venda, o fabricante pagava 40% de imposto.
Devido a problemas com os preços das matérias-primas, o custo de fabricação teve um aumento de 60%. Então, para evitar uma queda acentuada na produção, o governo resolveu diminuir a alíquota do imposto para 30% do preço de venda, e o fabricante concordou em diminuir o seu percentual de lucro, de 50% para 40%.
Calcule o novo preço de venda dessa mercadoria.

Respostas dos exercícios e testes

10 NOÇÕES DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

EXERCÍCIOS

1 a) 1 000 b) $\frac{57}{160}$

2 a) 30 b) $\frac{1}{5}$

3 a) R$ 240,00 b) estudante *A*: R$ 48,00
estudante *B*: R$ 40,00

4 a) 490 km b) 280 km

5 a) *B*
b) sim; preço unitário *A*: $\left(1 - \frac{1}{40}\right) \cdot \frac{10}{11} x \cong 0{,}88x$ reais, preço unitário *B*: $\frac{9}{10} x = 0{,}9x$ reais

6 72 litros **7** Na terceira xícara.

8 a) R$ 327,00 b) $f(x) = 160 + \frac{1}{50} x$

9 a) R$ 39,90 b) R$ 47,88

10 R$ 0,80 **11** 10% **12** R$ 500,00

13 a) 16,67 pontos percentuais b) 50%

14 25 ℓ **15** 0,3x

16 a) V b) F; 1,67% c) V
d) F; o percentual de março (51,02%) foi maior que o de abril (50,96%)

17 a) R$ 1,60
b) antes das dez: 50; entre dez e onze: 120; após as onze: 130

18 17,5% **19** 40%

20 a) 1997; 43,33% b) 9 **21** 58%

22 15 litros

23 a) R$ 3 120,00 **24** 30%
b) R$ 4 200,00

25 a) maior: papel higiênico; 25%
menor: detergente e sabonete; 10%
b) pão de forma: 9,09%
ovos: 16,67%
torrada: 20%
c) R$ 0,45

26 a) ameaças de morte: 10,97%
conflitos agrários: 4,54%
b) 289,7%
c) 48,5%, aproximadamente

27 R$ 40,00

28 a) *A*: 140% b) *A*: 3 000 reais/habitante
B: 21% *B*: 1 000 reais/habitante

29 a) julho e agosto; 22,2% c) 742
b) 19,11%

30 a) supermercado *X*: R$ 36,00 b) *X*: R$ 36,00
supermercado *Y*: R$ 38,40 *Y*: R$ 35,20

31 a) 242,56% b) 139,25 milhões

32 81% **33** a) 45,7% b) 11,8%

34 a) 44,77 bilhões
b) SP → 9,85 bilhões
RJ → 2,82 bilhões
PA → 5,51 bilhões
c) 2,5% e 12,8%, aproximadamente
d) 186 milhões de reais

35 a) R$ 11 800,00 b) R$ 530,00 c) R$ 5 440,00

36 R$ 2 400,00 **37** R$ 1 200,00 **38** 25 meses

39 a) 8,17% b) R$ 1,16, aproximadamente

40 a) 17,08% b) R$ 4 000,00

41 96% ao ano **42** a) 6,25% a.m. b) 5 meses

43 R$ 143,54 **44** R$ 5 000,00 **45** R$ 1 592,00

46 20% ao mês **47** a) R$ 126,82 b) 35 meses

48 6 **49** A segunda totalizará R$ 1 123,60 e a primeira, R$ 1 080,00.

50 a) R$ 1 146,39 **51** a) R$ 273,24
b) 14,64% b) 4,48%

52 a) $A_0 \cdot 1{,}05^3$ km² **53** 10
b) 34%

54 a) 1,67 b) 1,45 c) 18 anos, aproximadamente.

55 90,25% **56** a) $1{,}2^n \cdot A$; $\frac{1{,}2^{n-1}}{5} \cdot A$
b) 6

57 outubro

58 a) $V = V_0 \cdot 0{,}95^t$
b) Não; seriam necessários 13 anos e meio se tal desvalorização se mantivesse.

59 Os dois, pois os juros cobrados nas duas propostas se equivalem (ambos são de R$ 431,00).

60 R$ 35,57

TESTES DE VESTIBULARES

1	e	**7**	c	**13**	a	**19**	c
2	a	**8**	a	**14**	c	**20**	b
3	e	**9**	a	**15**	b	**21**	e
4	b	**10**	d	**16**	d	**22**	c
5	a	**11**	b	**17**	e	**23**	c
6	c	**12**	e	**18**	e		